КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ИЛИМ, ЖОГОРКУ
БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИННОВАЦИЯЛАР
МИНИСТРЛИГИ

“Б.ОСМОНОВ АТЫНДАГЫ ЖАЛАЛ-АБАД
МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ”
ИЛИМИЙ-БИЛИМ БЕРҮҮ ӨНДҮРҮШТҮК КОМПЛЕКСИ

К.С.АЛЫБАЕВ, М.Н.НУРМАТОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Окуу колдонмо

Манас
2026

УДК 517.9
ББК 22.161.6
А59

Б.Осмонов атындагы ЖАМУнун Методикалык кеңешинин 2025-жылдын 18-декабрындагы жыйынында каралып колдонууга жана басмага сунушталды.

Рецензенттер:
Сопуев А.С. – физ.-мат. илим. доктору, профессор
Джураев А.М. – физ.-мат. илим. доктору, проф. м.а.

Алыбаев, К. С., Нурматова, М. Н.
А59 Дифференциалдык теңдемелер: Окуу колдонмо.
– Манас: 2026. – 116 б.
ISBN 978-9967-09-513-7

Дифференциалдык теңдемелер жаратылышта кездешүүчү кубулуштарды, тагыраак айтканда нерсенин абалынын өзгөрүшүн, ылдамдыгын, ылдамдануусун изилдөөдө колдонулат. Жогорку билим берүүдө физика-математикалык билим берүү багыты боюнча кесипкөй адистерди даярдоодо дифференциалдык теңдемелер атайын курс катары окутулат.

Бул окуу колдонмо аталган багыттын студенттерине, окутуучуларына сунушталат.

УДК 517.9
ISBN 978-9967-09-513-7 ББК 22.161.6

МАЗМУНУ

НЕГИЗГИ ТҮШҮНҮКТӨР

Аныктама. *Көз – каранды эмес өзгөрмөнү, белгисиз функцияны жана анын туундусун камтыган теңдемелер дифференциалдык деп аталат.*

Теңдемеге көз – каранды эмес өзгөрмөнү жана белгисиз функциянын катышуусунун зарылдыгы жок, *бирок* туундунун катышуусу зарыл.

Туундунун эң жогорку тартиби **теңдеменин тартиби** деп аталат.

Аныктама. Эгер белгисиз функция бир өзгөрмөлүү болсо, анда кадимки дифференциалдык теңдеме деп аталат; көп өзгөрмөлүү болсо, анда теңдеме жекече туундудагы деп аталат.

Мисалдар: 1.1. $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$,

1.2. $\left(x'(t)\right)^2 - t \cdot x(t) = 0$,

1.3. $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$,

1.4. $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t)$,

1.5. $x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 1$.

1.1-1.5 - мисалдарында $x(t)$ – белгисиз функция; t – көз-каранды эмес өзгөрмө.

2.1. $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + u(x,y) = f(x,y)$,

2.2. $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$,

2.3. $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$,

2.4. $\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]^2 - \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]^2 + u(x,y) = 0$,

2.5. $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial y^3} = 0$.

2.1.-2.5.-мисалдарында $u(x,y)$ – белгисиз функция, ал эми x, y – белгисиз өзгөрмө. 1.1.-1.5 теңдемелери – кадимки, ал эми 2.1.-2.5 теңдемелери жекече туундудагы теңдемелер.

1.2., 1.4., 2.1., 2.4. теңдемелери – биринчи тартиптеги; 1.3., 1.5., 2.2., 2.3. – экинчи тартиптеги; 2.5. – үчүнчү тартиптеги теңдемелер.

Аныктама. *Дифференциалдык теңдеменин чечими деп, кандайдыр бир* $(-\infty < t < +\infty)$ *интервалында аныкталган жана тиешелүү тартиптеги туундуга ээ болгон каалаган функция аталат, аны теңдемеге койгондо теңдештикке айландырат.*

Мисалдар:

1. $x(t) = sin\omega t$ функциясы

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \ \omega - const.$$

дифференциалдык теңдемесинин чечими болуп саналат.

$$x'(t) = \omega \cdot cos\omega t, \qquad x''(t) = -\omega^2 \cdot sin\omega t$$

ээ болобуз. Табылган маанилерди теңдемеге коюп, теңдештикке ээ болобуз:

$$-\omega^2 \cdot sin\omega t + \omega^2 \cdot sin\omega t \equiv 0.$$

Дал ушундай эле жол менен

$$x(t) = cos\omega t, x(t) = C_1 sinx(t) + C_2 cos\omega t$$

(C_1, C_2 *– каалагандай турактуулар) функциялары*

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

теңдемесинин чечими болоору текшерилет.

2. $u(x,y) = x^2 - y^2$ функциясы

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

теңдемесинин чечими болот. Төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Табылган туундулардын маанилерин теңдемеге коюу менен

$$2 + (-2) \equiv 0$$

теңдештигине ээ болобуз.

$u(x, y) = Cxy$ функциясы да (C –каалагандай турактуу) берилген теңдеменин чечими болуп саналат.

Бул учурда биз чечимдерди табуу маселеси, чечимдердин мүмкүн болгон саны жөнүндө маселени койбойбуз. Өз учурунда бул жана башка маселелерге жооптор алынат.

Биз мындан ары негизинен, бир гана кадимки дифференциалдык теңдемелер жана алардын системасын карайбыз.

ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР

n – тартиптеги теңдемени жалпы түрдө төмөндөгүчө жазууга болот:

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \qquad (1)$$

$n = 1$ болгондо

$$F\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0 \qquad (2)$$

биринчи тартиптеги теңдемеге ээ болобуз.

(2) теңдеме берилсин дейли.

F функциясы t, x, x' үч өзгөрмөдөн көз-каранды функция болуп эсептелет. Айрым учурларда (2) катыш x' өзгөрмөсүн t, x өзгөрмөлөрүнөн айкын эмес бир маанилүү функция катары аныктайт.

Бул учурда (2) теңдеме

$$x'(t) = f(t, x(t)). \qquad (3)$$

түрүндөгү теңдемеге тең күчтүү.

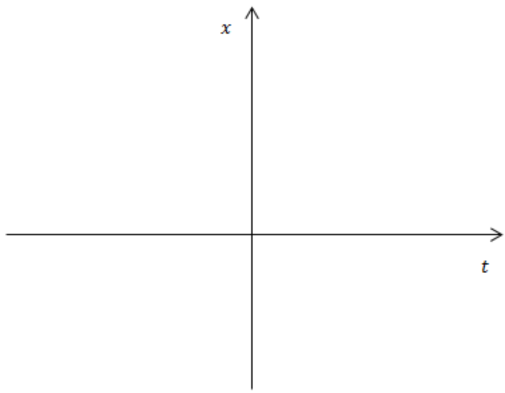
(3) дифференциалдык теңдеме туундусуна карата чечилген деп аталат.

(2) жалпы дифференциалдык теңдемеге караганда (3) теңдемени изилдөө жеткиликтүүрөөк.

(3) теңдемени изилдөөдө, биз (2) теңдемени $x'(t)$ туундусуна карата чечилген деп карабайбыз, $f(t,x)$ функциясын t,x эки өзгөрмөдөн көз-каранды функция катары берилди деп эсептейбиз.

ГЕОМЕТРИЯЛЫК СҮРӨТТӨЛҮШ

(3) теңдеме берилсин дейли. $R^2 = \{(t,x)\}$ (1-сүрөт) координаталык тегиздигин карайлы.



1-сүрөт.

(3) дифференциалдык теңдемесин аныктоочу $f(t,x)$ функциясы t жана x аргументтеринин бардык маанилери үчүн аныкталбашы мүмкүн, геометриялык тилде айтканда, R^2 тегиздигинин бардык чекиттери үчүн эмес, R^2 тегиздигинин кандайдыр бир $\mathcal{D}$ көптүгүнүн айрым бир чекиттеринде аныкталышы мүмкүн. Мындан ары $\mathcal{D}$ ны ачык көптүк деп эсептейли. Бул болсо, $A\epsilon\mathcal{D}$ ар бир чекит менен

катар $\mathcal{D}$га A чекитинин кандайдыр бир чекебели (борбору A болгон тегерек) да кирет дегенди түшүндүрөт.

$f(t,x)$ $\mathcal{D}$ да үзгүлтүксүз жана $r_1 < t < r_2$ үчүн аныкталган (3) теңдеменин чечими $x = \varphi(t)$ болсун дейли.

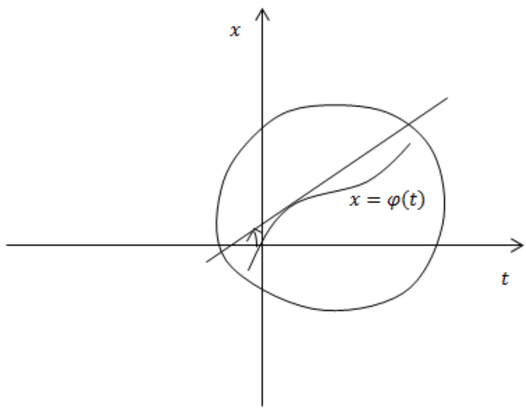
$x = \varphi(t)$ны *(3)* теңдемеге коюп,

$$\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t)) \qquad (4)$$

теңдештигине ээ болобуз.

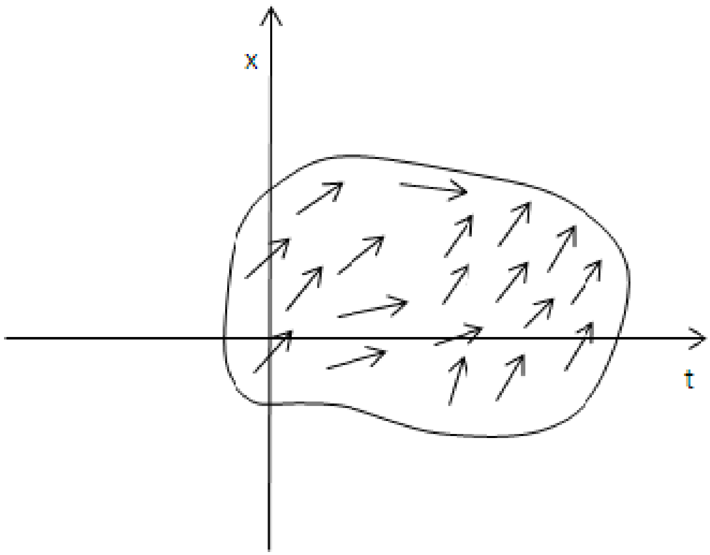
$\varphi(t)$ функциясынын графиги $\mathcal{D}$ ачык көптүгүнөн толук бойдон өтөт. Эгер туундунун геометриялык маанисин эске салсак, анда ар бир чекитте график бурчтук коэффициенти $f(t,\varphi(t))$ га барабар болгон жанымага ээ болот (2-сүр).

$x = \varphi(t)$ функциясынын графиги (3) дифференциалдык теңдеменин интегралдык ийриси деп аталат.



2-сүрөт.

$f(t,x)$ функциясы $\mathcal{D}$да үзгүлтүксүз болгондуктан, $\mathcal{D}$ көптүгүнүн каалаган чекити аркылуу бурчтук коэффициенти $f(t,x)$ ке барабар болгон түз сызык жүргүзүүгө болот (3-сүр).



3-сүрөт.

Ошентип, биз (3) теңдемеге туура келүүчү багыттардын талаасына ээ болдук.

Каалагандай $x = \varphi(t)$ интегралдык ийриси ар бир өзүнүн $(t, \varphi(t))$ чекитинде бурчтук коэффициенти $f(t, \varphi(t))$ болгон түз сызыкты жанып өтөөрүн (3) теңдеменин геометриялык сүрөттөлүшү менен анын чечимдеринин геометриялык сүрөттөлүшүнүн ортосундагы байланыш аныктайт.

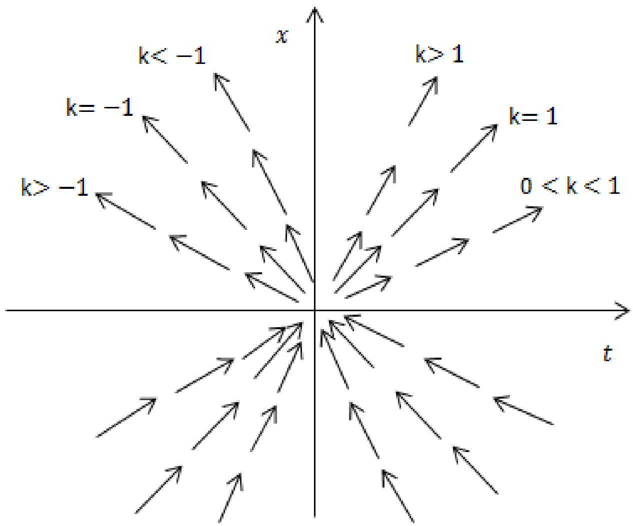
Берилген дифференциалдык теңдемеден аныкталуучу багыттардын талаасын өздөштүрүү менен бул теңдеменин интегралдык ийрилери жөнүндө айрым түшүнүктөрдү, айрым учурда интегралдык ийрилердин өзүн да алабыз.

Багыттардын талаасын өздөштүрүүдө, талаанын багыты бардык чекиттерде ошол эле болгон сызыктар өзгөчө кызыкчылык туудурат. Мындай сызыктар изоклиндер деп аталышат.

Мисалдар:

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$ теңдемеси берилсин. Багыттардын талаасын изилдөө керек. Теңдеменин оң жак бөлүгү $t \neq 0$ үчүн аныкталган.

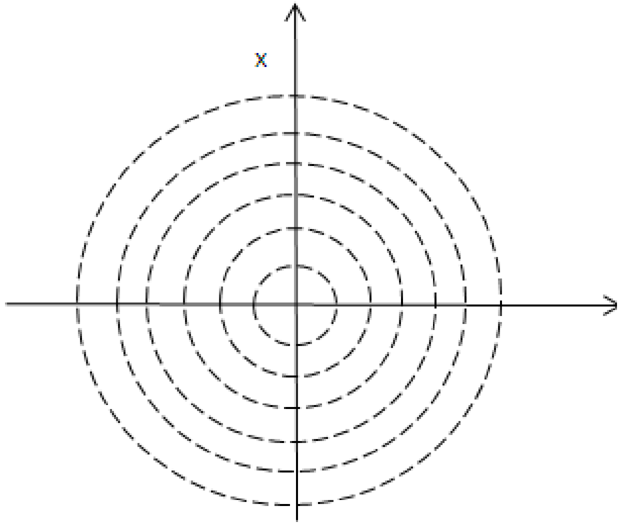
Мейли $\frac{x}{t} = k$ – турактуу болсун. $x = kt$ ээ болобуз. k нын түрдүү маанилери үчүн багыттардын талаасына ээ болобуз (4-сүр).



4-сүрөт.

2. $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$ теңдемесин карайлы.

$-\frac{t}{x} = k_1 - const$ *алалы. Мындан* $x = -\frac{1}{k_1} t$.



5-сүрөт.

k (мурунку мисалдагы) менен k_1ди салыштыралы.

$$k \cdot k_1 = -1,$$

натыйжада, k менен k_1ден аныкталуучу жанымалар өз ара перпендикулярдуу.

$x' = -\frac{t}{x}$ теңдемесинин багыттар талаасы 5-сүрөттө сүрөттөлгөн. Багыттар талаасынын сүрөттөлүшү $x' = \frac{x}{t}$ дифференциалдык теңдеменин чечими $x = kt$ функциясы болоорун негиздейт. Чындыгында, $x' = k$ болсо, анда

$$k = \frac{kt}{t} = k.$$

$x' = -\frac{t}{x}$ дифференциалдык теңдемесинин чечими болуп, $x^2 + t^2 = c^2$ ($c \neq 0$ жана каалагандай турактуу) функциясы эсептелет.

Текшерүү: $x^2 = c^2 - t^2$, мындан $2xx' = -2t$, $x' = -\frac{t}{x}$.

КОШИ МАСЕЛЕСИ

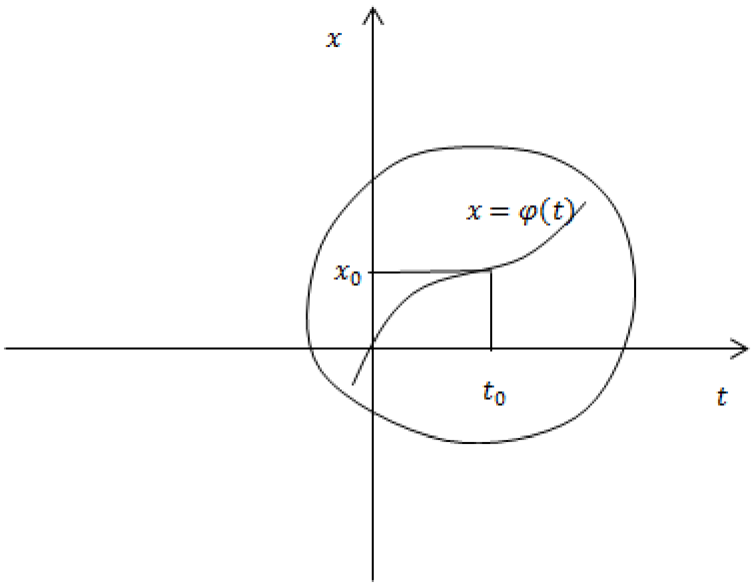
Теориялык жана колдонмо мүнөздөгү көптөгөн суроолордо (3) дифференциалдык теңдеменин бардык чечимдеринин арасында

$$x = \varphi(t) \tag{4}$$

$$t = t_0 \text{ болгондо } \varphi(t_0) = x_0 \tag{5}$$

(5) шартын канааттандыруучу (4) чечимди табуу талап кылынат, мында t_0 жана x_0 – берилген сандар, болгондо да $(t_0, x_0) \epsilon \mathcal{D}$.

Геометриялык жактан, ал $\mathcal{D}$ областынын (t_0, x_0) чекити аркылуу өтүүчү интегралдык ийри изделип жаткандыгын түшүндүрөт (6 - сүр).



6-сүрөт.

(5) шарт (4) чечимдин баштапкы шарты деп аталат, ал эми t_0, x_0 – баштапкы берилгендер.

Берилген (4) баштапкы шартты канааттандыруучу чечимди табуу маселеси Коши маселеси деп аталат.

<u>Мисалдар</u>:

1. $x'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ теңдемеси берилсин дейли.

$x(0) = 1$ шартын канааттандыруучу $x(t)$ чечимин табуу талап кылынсын.

$$x(t) = arctgt + C$$

функциясы берилген теңдеменин чечими болоорун текшерүү кыйын эмес, C – каалагандай турактуу.

$t = 0$ деп эсептеп,

$$x(0) = arctg0 + C = 1$$

же $\mathrm{C} = 1$ди табабыз.

Берилген баштапкы шартты канааттандыруучу чечим болуп

$$x(t) = arctgt + 1$$

эсептелет.

$x(t) = arctgt$ функциясы чечим боло алаарын баса белгилейли. Бул чечим берилген баштапкы шартты канааттандырбайт, б. а.

$$x(0) = arctg0 = 0.$$

Каралып жаткан мисал чыгарылышта каалагандай турактуу сан болушу маанилүү экендигин көрсөтөт.

2. $x(0) = 1$ баштапкы шартын канааттандыруучу

$$x'(t) = 2t,$$

теңдемесинин чечими $x(t) = t^2 + 1$ болот. Бул (0, 1) чекити аркылуу өткөн парабола.

ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕЧИМДИН ЖАЛГЫЗДЫГЫ ЖАНА ЖАШАШЫ ЖӨНҮНДӨ ТЕОРЕМА

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

дифференциалдык теңдемеси берилсин дейли, мында t – көз-каранды эмес өзгөрмө; $x(t)$ – белгисиз функция; берилген $f(t,x)$ функциясы – t, x өзгөрмөлөрүнүн $\mathcal{D}$ ачык областында аныкталган.

Маселе. Эгер $(t_0, x_0)\epsilon\mathcal{D}$ болсо, анда

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

шартын канааттандыруучу (1) теңдеменин $x = \varphi(t)$ чечими жашайбы?

Коюлган маселени (1)-(2) маселеси деп атайлы.

Маселенин чечими төмөнкү теоремадан аныкталат:

Теорема 1. (чечимдин жашашы жана жалгыздыгы)

$f(t,x)$ функциясы жана анын $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундусу $\mathcal{D}$ ачык көптүгүнүн баарында үзгүлтүксүз функциялар болушсун.

Анда: 1) $\mathcal{D}$ көптүгүнүн каалагандай (t_0, x_0) чекити үчүн (2) шартты канааттандыруучу (1) теңдеменин $x = \varphi(t)$ чечими жашайт;

2) эгерде (1) теңдеменин $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ чечимдери эч болбосо $t = t_0$ бир мааниси үчүн дал келсе, б.а., эгер

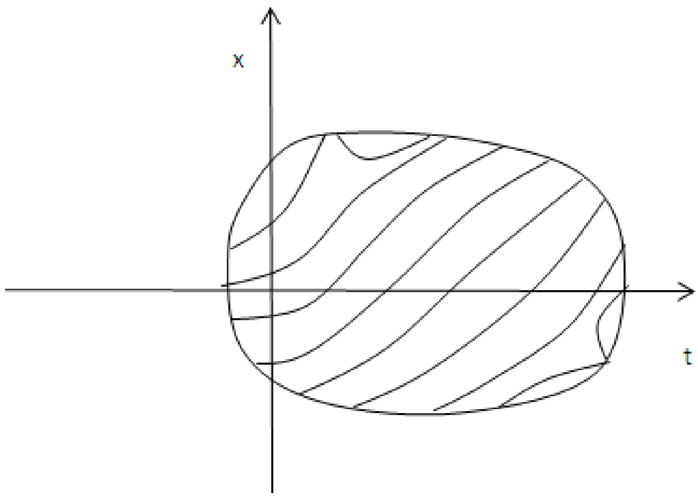
$$\varphi(t_0) = \psi(t_0),$$

болсо, анда бардык аныкталган t өзгөрмөсүнүн экөө тең аныкталган маанилери үчүн теңдеш барабар болушат.

Теорема 1дин корутундулары боюнча айрым тактоолорду жүргүзөлү. $x = \varphi(t)$ чечими (2) баштапкы шартты канааттандыргандыгы жөнүндө ырастоо $x = \varphi(t)$ чечими аныкталган $r_1 < t < r_2$ интервалы t_0 чекитин камтый тургандыгын негиздейт.

Андан ары теорема 1. $\mathcal{D}$ көптүгүнүн каалагандай (t_0, x_0) чекитинин координатасы (1) теңдеменин кандайдыр бир чечими үчүн баштапкы маанилер болуп саналаарын жана жалпы баштапкы маанилүү эки чечим дал келээрин ырастайт.

1-теореманын геометриялык мазмуну $\mathcal{D}$ көптүгүнүн ар бир (t_0, x_0) чекити аркылуу (1) теңдеменин жалгыз гана интегралдык ийриси өтөөрүн түшүндүрөт (7-сүр.).



7-сүрөт.

Мисал карайлы.

$$x' = ax, \tag{3}$$

дифференциалдык теңдемени чыгаруу талап кылынсын дейли, a - чыныгы сан. Мында

$$f(t, x) = ax.$$

$f(t,x)$ функциясы x өзгөрүлмөсүнөн гана көз-каранды. $f(t,x)$ функциясы аныкталган көптүк R^2 тегиздигине толугу менен дал келет. $f(t,x) = ax$ функциясынын өзү жана анын $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ жекече туундусу R^2 тегиздигинде t жана x өзгөрмөлөрү боюнча үзгүлтүксүз функциялар болуп саналышат. Теорема 1дин бардык шарттары арткарылат.

Каалагандай $(t_0, x_0) \epsilon R^2$ чекити үчүн $x_0 = \varphi(t_0)$ шартын канааттандыруучу $x = \varphi(t)$ чечими жашайт. (3) кө түздөн-түз ордуна коюу аркылуу

$$x(t) = Ce^{at} \tag{4}$$

функциясы (3) теңдеменин чечими экендиги текшерилет, мында C – каалагандай чыныгы сан.

(4) чечим $-\infty < t < +\infty$ түз сызыгында аныкталган. (4) кө $t = t_0$ коюп, $x_0 = \varphi(t_0)$ шартын канааттандыруучу чечимди аныктайбыз.

Чындыгында $x(t_0) = Ce^{at_0}$ же $x_0 = Ce^{at_0}$.

Мындан $C = x_0 e^{-at_0}$ аныктайбыз. C нын маанисин (4) кө коюп,

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} \tag{5}$$

ээ болобуз.

(5) чечим берилген баштапкы шартты канааттандырат.

R^2 тегиздигинен түрдүү (t_0, x_0) чекиттерди тандоо менен (4) дөн (3) теңдеменин түрдүү чечимдерин алабыз. Ошентип, (4) функция (3) теңдеменин жалпы чечими болуп саналат.

Берилген баштапкы шартты канааттандыруучу чечимди табуунун мындай жол-жобосу жалпы учур үчүн да сакталат.

Эгер (1) теңдеме берилсе жана биз кандайдыр бир ыкма менен C каалагандай турактууну камтыган жалпы чечимди таба алсак, башкача айтканда

$$x = \varphi(t, C). \tag{6}$$

(6)га $t = t_0, x = x_0$ маанилерин коюп, $C = C_0$ маанисин аныктайбыз. Анда баштапкы шартты канааттандыруучу $x(t) = \varphi(t, C_0)$ чечимине ээ болобуз.

Теорема 1ди далилдөө. 1. $x = \varphi(t)$ – $r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган (1) теңдеменин кандайдыр бир чечими болсун дейли жана

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

Анда $\varphi(t)$ функциясы үчүн $r_1 < t < r_2$ интервалында

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau. \tag{7}$$

интегралдык теңдештик орун алат.

Тескерисинче, эгер $r_1 < t < r_2$ интервалында кандайдыр бир үзгүлтүксүз $\varphi(t)$ функциясы үчүн (7) теңдештик орун алса, анда $x = \varphi(t)$ функциясы дифференцирленүүчү болот, (1) теңдеменин чечими болот жана (2) баштапкы шартты канааттандырат.

Муну далилдейли.

(7) тендештик орун алсын дейли. $t = t_0$ду койсок, $\varphi(t_0) = x_0$ ээ болобуз. $f(\tau, \varphi(\tau))$ үзгүлтүксүз, анда (7)нин оң жак бөлүгү дифференцирленүүчү. (7) теңдештикти дифференцирлеп,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{8}$$

теңдештикке ээ болобуз.

(8) жана (2) теңдештиктер аткарылсын дейли.
(8)ди t_0 дон t га чейин интегралдап,

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau$$

ээ болобуз. Мындан (7) ге ээ болобуз.

Далилденген сүйлөмдөн (1) жана (2) маселелердин чечимдеринин жашашын далилдөө үчүн (7) (интегралдык теңдеменин) теңдеменин чечиминин жашашын далилдөө жетиштүү экендиги келип чыгат.

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots \tag{9}$$

t_0 чекитин өз ичине камтыган кандайдыр бир $r_1 \le t \le r_2$ кесиндисинде аныкталган үзгүлтүзсүз функциялардын удаалаштыгын түзөлү. (9) удаалаштыктагы ар бир функция мурунку аркылуу

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big)d\tau, \; k = 0,1,2, \dots \tag{10}$$

барабардыгынын жардамында аныкталат.

Эгер $\varphi_k(t)$ функциясынын графиги $\mathcal{D}$ көптүгүнөн өтсө, анда $\varphi_{k+1}(t)$ графиги да $\mathcal{D}$ көптүгү аркылуу өтүүгө тийиштүү. Эмесе $\varphi_{k+2}(t)$ функциясын аныктоо мүмкүн эмес. буга кантип жетишүүгө болоорун көрсөтөлү.

Теорема 1дин шарты боюнча каалагандай $(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ үчүн $f(t,x)$, $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ функциялары үзгүлтүксүз, анда бардык $(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ үчүн

$$|f(t,x)| \le \mathrm{C}_1, \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \le \mathrm{C}_2$$

барабарсыздыктары аткарылат, мында C_1, C_2 - кандайдыр бир оң сандар.

$\mathcal{D}$ – ачык область, анда каалагандай $(t_0, x_0)\epsilon\mathcal{D}$ үчүн

$$|t - t_0| \le r, |x - x_0| \le a$$

барабарсыздыктарынан аныкталуучу Π_r тик бурчтук жашайт жана $\Pi_r \subset \mathcal{D}$. $|t - t_0| \le r$ кесиндисинде берилген жана графиги Π_r тик бурчтугу аркылуу өткөн бардык үзгүлтүксүз функциялардын тобун Ω_r аркылуу белгилейли.

Ошентип, $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде аныкталган $\varphi(t)$ функциясы Ω_r тобуна таандык болот, качан гана ошол кесиндиге таандык каалагандай t үчүн

$$|\varphi(t) - x_0| \leq a \qquad (11)$$

барабарсыздыгы орун алса.

(9) удаалаштыкка кайталы.

Кандай шарттарда $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r$ болоорун аныктайлы.

$$\varphi_0(t) \equiv x_0 \epsilon \Omega_r.$$

$$|\varphi_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)| d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r.$$

Эгер $C_1 \cdot r \leq a$ же $r \leq \frac{a}{C_1}$ болсо, анда $\varphi_1(t) \epsilon \Omega_r$.

Андан ары

$$|\varphi_2(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)| d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r \leq a,$$

$$r \leq \frac{a}{C_1}. \qquad (12)$$

Ошентип, (12) шарт аткарылганда $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r,\ k = 0,1,2, \dots$ орун алат.

Эми $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде (9) удаалаштыктын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейли. Бул маселени чечүү үчүн

$$\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots +$$

$$+ (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \dots \qquad (13)$$

катарынын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейли.

Вейерштрасстын белгисинен пайдаланалы.

$$|\varphi_0| = |x_0|,$$

$$|\varphi_1 - \varphi_0| = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r \leq a,$$

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_1) - f(\tau, x_0)| d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial f(\tau, \theta)}{\partial x} \right| |\varphi_1 - \varphi_0| d\tau \leq C_2 \cdot |t - t_0| \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \leq$$

$$\leq C_2 \cdot |t - t_0| \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \leq C_2 \cdot r \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \leq$$

$$\leq C_2 \cdot r \cdot a$$

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \leq C_2 \cdot r \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0|.$$

ээ болобуз.

Эгер $C_2 \cdot r < 1$ болсо, анда

$$r < \frac{1}{C_2}. \tag{14}$$

$C_2 \cdot r = q$ деп белгилейли.

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_2) - f(\tau, \varphi_1)| d\tau \leq \int_{t_0}^{t} C_2 |\varphi_2 - \varphi_1| d\tau \leq$$

$$\leq C_2 \cdot q \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \times |t - t_0| \leq C_2 \cdot r \cdot q \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| =$$

$$= q^2 \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \leq q^2 \cdot a.$$

Процессти улантуу менен

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq q^k a$$

алабыз. Натыйжада

$$\left| \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \right| \leq |\varphi_0| + \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq$$

$\leq |\varphi_0| + a \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ орун алат.

Сан катары жыйналат, анда $|t - t_0| < r \left(\mathrm{r} = \min\left\{\frac{1}{C_2}, \frac{a}{C_1}\right\}\right)$ маанилери үчүн (9) функциялардын удаалаштыгы кандайдыр бир $\varphi(t)$ функциясына бир калыпта жыйналат. (10) да $k \to +\infty$ пределге өтсөк,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

орун алат.

Демек, (1) теңдеменин (2) баштапкы шартты канааттандырган чечиминин жашашы далилденди; ошону менен катар $x = \varphi(t)$ чечими $|t - t_0| < r$ интервалында аныкталаары негизделди, мында r – (12), (14) барабарсыздыктарды канааттандыруучу каалагандай сан.

Чечимдин жалгыздыгын далилдөөгө өтөлү.

$x = \varphi(t), x = \psi(t)$ (2) шартты, башкача айтканда

$$\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = x_0$$

жана аныктаманын $r_1 < t < r_2$ жалпы интервалын канааттандыруучу (1) теңдеменин чечимдери болсун дейли.

Π_r тик бурчтугун карайлы. $\varphi(t), \psi(t)$ – (7) теңдеменин чечимдери болгондуктан, алар Ω_r тобуна таандык болушат.

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = \int_{t_0}^{t} \left|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right| \leq$$

$$\leq C_2 \cdot |t - t_0| |\varphi(t) - \psi(t)| \leq$$

$$\leq C_2 \cdot r \times |\varphi(t) - \psi(t)| = q \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|,$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < q \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|$$

ээ болобуз.

Бул $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ шарты аткарылганда гана орун алат. Теорема далилденди.

ЭСКЕРТҮҮ

Теорема 1ди далилдөөдө колдонулган метод ***удаалаш жакындаштыруу методу же Пикардын методу*** деп аталат.

Теорема 1деги “ $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундусу $\mathcal{D}$ ачык көптүгүндө үзгүлтүксүз функциялар болушсун” шартын *“x өзгөрмөсү боюнча функция Липшиц шартын канааттандырат”*, б.а.

$$\forall(t, x_1) \text{ жана } \forall(t, x_2)|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

мында L - x_1 жана x_2 ден көз-каранды эмес кандайдыр бир турактуулар шартына алмаштырууга болот.

Теорема 1де формулировкаланган шарт Липшиц шартына салыштырмалуу күчтүүрөөк талап болуп саналат. Бул $\frac{\partial f}{\partial x}$ үзгүлтүксүз жекече туундунун жашашы Липшиц шартынын аткарылышына кепилдик берээрин түшүндүрөт. Липшиц шартынан дайыма эле $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундунун үзгүлтүксүздүгү келип чыкпайт.

Чындыгында, $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундусу $\mathcal{D}$ областында үзгүлтүксүз болсун дейли. Каалагандай $[x_1, x_2] \subset \mathcal{D}$ кесиндини алалы. $f(t, x)$ функциясына чектүү өсүндүлөр жөнүндө Лагранждын теоремасын колдонуп,

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = \frac{\partial f(t, \theta)}{\partial x}(x_1 - x_2), x_1 < \theta < x_2$$

ээ болобуз. $\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x}$ үзгүлтүксүз, анда $\left|\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x}\right| \leq L$.

Ушуну эске алып,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

ээ болобуз.

Мисал.
$x'(t) = x(t)$ теңдемеси үчүн чечимди удаалаш жакындаштыруу методун колдонуп табабыз.

$t_0 = 0, x_0 = 1$ болсун дейли.

Интегралдык теңдеме

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$$

түрүндө жазылат.

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$

функциялардын удаалаштыгын түзөлү.

$$\varphi_0(t) \equiv 1,$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \varphi_0(\tau)\, d\tau = 1 + t,$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau)\, d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!}\right) d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ээ болобуз.

Бул удаалаштыктын предели болуп, сан огунун каалаган кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу $\varphi(t) = e^t$ функциясы эсептелет.

ИНТЕГРАЛДООНУН ЭЛЕМЕНТАРДЫК МЕТОДДОРУ

Дифференциалдык теңдемелер менен иш алып баруудa, биздин алдыбызда пайда болуучу негизги маселе болуп анын чечимдерин издөө маселеси эсептелет.

Алгач, бул маселени чечүү үчүн “дифференциалдык теңдемелерди квадратурада интегралдоого”, башкача айтканда чечимди элементардык функциялардын жана алардын интегралынын жардамында жазууга аракет жасашкан. Кийинчерээк мындай маанидеги чечимдер теңдемелердин айрым гана типтери үчүн гана жашагандыгы такталгандыктан, теориянын оордук борбору чечимдердин өзгөрүшүнүн жалпы закон-ченемдүүлүктөрүн үйрөнүүгө жылдырылган.

Биз мындан ары квадратурада интегралдоо методу аркылуу чечимдерди табууга болгон айрым дифференциалдык теңдемелердин классын карайбыз.

ТОЛУК ДИФФЕРЕНЦИАЛДАГЫ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$x'(t) = \frac{f(t,x)}{g(t,x)} \tag{1}$$

теңдемеси берилсин.

$f(t,x)$, $g(t,x)$ функциялары R^2 тегиздигинин кандайдыр бир $\mathcal{D}$ ачык көптүгүндө t жана x өзгөрмөлөрү боюнча аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун дейли, болгондо да $\forall(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ $(g(t,x) \neq 0)$.

(1) теңдемени

$$g(t,x)dx - f(t,x)dt = 0 \tag{2}$$

$\left(x' = \frac{dx}{dt}\right)$ түрүнө өзгөртүп түзөлү. (2) теңдеменин сол жак бөлүгүндөгү туюнтма $\mathcal{D}$ көптүгүндөгү кандайдыр бир $F(t,x)$ функциясынын толук дифференциалын берет дейли. Бул каалаган $(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ үчүн

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = g(t,x),\ \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -f(t,x) \qquad (3)$$

туура келүүчүлүгү орун алаарын түшүндүрөт.

$x = \varphi(t)\ -\ r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган (1) дифференциалдык теңдеменин чечими болсун дейли. Анда

$$\varphi'(t) = \frac{f(t,\varphi(t))}{g(t,\varphi(t))}$$

ээ болобуз, мындан

$$g\big(t,\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) - f\big(t,\varphi(t)\big) = 0$$

орун алат.

Бул барабардыктын сол жагы (3) нүн негизинде $F\big(t,\varphi(t)\big)$ функциясынын t боюнча толук туундусун берет.

Анда $r_1 < t < r_2$ интервалында

$$\frac{dF(t,\varphi(t))}{dt} = 0$$

болот. Мындан

$$\forall t \epsilon (r_1, r_2)(F(t,\varphi(t)) = C - const).$$

Биз (1) теңдеменин каалагандай $x = \varphi(t)$ чечими үчүн

$$F(t,\varphi(t)) = C$$

теңдештиги орун алаарын далилдедик.

Эми кандайдыр бир интервалда берилген жана

$$F(t,x) = C \qquad (4)$$

теңдемесинен айкын эмес функция катары аныкталган ар бир $x = \varphi(t)$ функциясы (1) дифференциалдык теңдеменин чечими болуп саналаарын далилдейли.

(4) теңдештикти *t* боюнча дифференцирлеп (3)гө ылайык,

$$g(t,x)\cdot\varphi'(t) - f\big(t,\varphi(t)\big) = 0$$

ээ болобуз. Мындан $x = \varphi(t)$ (1) теңдеменин чечими болуп саналаары көрүнүп турат.

Далилденгенге төмөндөгүдөй геометриялык түшүндүрмө берүүгө болот: (1) дифференциалдык теңдеменин ар бир интегралдык ийриси бүтүн бойдон кандайдыр бир $F(t,x)$ функциясынын деңгээл сызыгында толук бойдон жайгашкан, башкача айтканда (4) теңдемеден аныкталат. Тескерисинче, (4) деңгээл сызыктын ар бир байланыштуу бөлүгү интегралдык ийрини берет.

$F(t,x)$ функциясынын деңгээл сызыктары бир нече бөлүктөрдөн турушу мүмкүн, анда бул учурда бүтүн деңгээл сызык бир интегралдык ийри болуп саналбайт, бир нече интегралдык ийрилерге ажырайт, башкача айтканда бир C турактуусу (4) айкын эмес теңдемеге ылайык, чексиз көп бир нече чечимдерди аныктайт.

(2) теңдеме берилсин дейли. Кандай шарттарда (2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болуп саналат?

Коюлган суроого жооп берүү үчүн t, x өзгөрмөлөрү боюнча аныкталган жана үзгүлтүксүз жана $\mathcal{D}$ да $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}$ үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болгон $F(t,x)$ функциясы жашасын дейли.

$$dF(t,x) = g(t,x)dx - f(t,x)dt$$

орун алсын дейли. Анда

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dx = g(t,x)dx - f(t,x)dt$$

теңдештигине ээ болобуз. Мындан

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -f(t,x), \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = g(t,x) \qquad (5)$$

келип чыгат.

$g(t,x), f(t,x)$ функциялары $\mathcal{D}$ да $\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$ үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун дейли. Мындай шартта

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t}.$$

Каалагандай $(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ үчүн $\mathcal{D}$ областында $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial t}$ үзгүлтүксүз экендигинен

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t}$$

келип чыгат.
Анда

$$-\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t} \tag{6}$$

(2) нин сол жак бөлүгү кандайдыр бир $F(t,x)$ функциясынын толук дифференциалы деп эсептеп, (6) шартты алабыз. (6) аткарылса, анда (2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болуп саналаарын далилдөөгө болот.

Ошентип, (6) шарт (2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болушу үчүн зарыл жана жетиштүү шарт болуп саналат.

Эгер (5) шарт аткарылса, анда жалпы чечимди төмөнкүчө түрдө жазууга болот:

$$-\int_{t_0}^{t} f(\tau,x)d\tau + \int_{x_0}^{x} g(t_0,\xi)d\xi = C \tag{7}$$

же

$$-\int_{t_0}^{t} f(\tau,x_0)d\tau + \int_{x_0}^{x} g(t,\xi)d\xi = C \tag{8}$$

(2) теңдеменин жалпы чечимин башка ыкма менен табууга болот. $F(t,x)$ функциясы (5) шартты канааттандырсын дейли. Биринчи теңдемени t боюнча интегралдап

$$F(t,x) = -\int f(t,x)dt + \varphi(x), \tag{9}$$

ээ болобуз, мында $\varphi(x)$ функциясы x тен көз-каранды каалагандай функция.

$\varphi(x)$ функциясын (9) функция экинчи теңдеменин чечими болгондой тандап алалы. (9) ду x боюнча дифференцирлеп жана $\frac{\partial F}{\partial x} = g(t,x)$ деп

$$\varphi'(x) = v(x)$$

ээ болобуз. Мында $v(x)$ – кандайдыр бир x тен көз-каранды функция.

Бул теңдемени интегралдап,

$$\varphi(x) = \int v(x)dx$$

алабыз. Эми (2) теңдеменин жалпы чечимин төмөндөгүчө жазууга болот:

$$\int f(t,x)dt + \int v(x)dx = \mathrm{C}.$$

Аналогиялуу түрдө $\frac{\partial F}{\partial t} = -f(t,x)$ теңдемесинен

$$\int g(t,x)dx + \int v_1(t)dt = C$$

алабыз.

<u>Мисалдар</u>: 1. $tdt + xdx = 0$

(6) шартты текшеребиз:

$$f(t,x) = -t,\ g(t,x) = x. \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Демек берилген теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме.

Теңдемени

$$\frac{1}{2}\left(d(t^2) + d(x^2)\right) = 0$$

түргө өзгөртүп түзүүгө болот. Бул барабардыкты интегралдап, $\frac{1}{2}(t^2 + x^2) = C$ ээ болобуз. Бул жалпы чечим.

Чечимди (7) же (8) формула боюнча алууга болот.

$\int_{t_0}^{t} \tau d\tau + \int_{x_0}^{x} \xi d\xi = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}t_0^2 - \frac{1}{2}x_0^2 = C$ алабыз.

Мындан

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\xi^2 = C_1 \equiv C + \frac{1}{2}(t_0^2 + x_0^2).$$

ИНТЕГРАЛДООЧУ КӨБӨЙТҮҮЧҮ

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0. \qquad (1)$$

теңдемеси берилсин дейли. (1) толук дифференциалдагы теңдеме болуп саналбайт.

Аныктама. Эгерде (1) теңдеменин эки жак бөлүгүнө тең $\mu(t,x)$ функциясын көбөйткөндөн кийин толук дифференциалдагы

$$\mu M dt + \mu N dx = 0 \qquad (2)$$

теңдемеге ээ боло тургандай, $\mu(t,x)$ функциясы жашаса, анда μ функциясы интегралдоочу көбөйтүүчү деп аталат.

(2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болгондуктан, $\mu(t,x)$ функциясынын үзгүлтүксүз дифференцирленүүчүлүгүн эске алып, $\mu(t,x)$ функциясын аныктоо үчүн төмөндөгү теңдемени алууга болот:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

же

$$N\frac{\partial\mu}{\partial t} - M\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial M}{\partial x} - \mu\frac{\partial N}{\partial t} \qquad (3)$$

<u>Мисал</u>.

$$(1 - t^2x)dt + t^2(x - t)dx = 0$$

берилсин дейли.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -t^2, \frac{\partial N}{\partial t} = 2tx - t^2$$

$$M(t,x) = 1 - t^2x, N(t,x) = t^2(x - t).$$

$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ шарты орун албайт, демек, берилген теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болуп саналбайт.

$\mu(t,x)$ интегралдоочу көбөйтүүчүсү жашайбы?

$\mu(t,x)$ интегралдык көбөйтүүчүсү t дан гана көз-каранды болсун дейли.

Анда (3) дөн

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{-t^2 - 2tx + 3t^2}{t^2(x-t)} = \frac{2t(t-x)}{t^2(x-t)} = -\frac{2}{t},$$
$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{t}$$

ээ болобуз. Мындан

$$ln\mu = -2lnt, \mu = \frac{1}{t^2}$$

келип чыгат. Эми берилген теңдеменин эки жагын тең $\frac{1}{t^2}$ ка көбөйтүп,

$$\left(\frac{1}{t^2} - x\right)dt + (x - t)dx = 0,$$
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{t^2} - x\right)}{\partial x} = -1, \frac{\partial(x-t)}{\partial t} = -1$$

ээ болобуз.

Толук дифференциалдагы тендемеге ээ болдук. μ функциясы x тен гана көз-каранды болушу мүмкүн.

СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$x'(t) = a(t)x + b(t) \tag{1}$$

теңдемеси биринчи тартиптеги сызыктуу теңдеме деп аталат, мында $x(t)$ – белгисиз функция, $a(t), b(t)$ – берилген функциялар.

(1) теңдемени чыгаруу маселесин коёлу. $a(t), b(t)$ функциялары кандайдыр бир $r_1 < t < r_2$ интервалында үзгүлтүксүз болсун дейли. (1) теңдеменин оң жак бөлүгү үчүн 1-теореманын бардык шарттары аткарылат. t_0 чекити $r_1 < t < r_2$ интервалынын кандайдыр бир чекити болсун дейли.

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

болсун дейли.

Теңдеменин бардык чечимдеринин жыйындысы

$$x = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\,d\tau\right) e^{A(t)} \tag{2}$$

формуласынын жардамында жазылаарын далилдейли, мында x_0 - каалагандай турактуу. (2) функция (1) нин чечими болуп саналат. Бул түздөн-түз ордуна коюу аркылуу текшерилет. (2) формула (1) теңдеменин бардык чечимдерин камтый тургандыгын далилдейли.

$\varphi(t)$ – $r_1 \le s_1 < t < s_2 \le r_2$ интервалында аныкталган (1) чечими болсун дейли.

τ_0, ξ_0 – маанилери $x = \varphi(t)$ чечиминин баштапкы маанилери болсун дейли. (2) формуладан аныкталган чечим өзүнүн τ_0, ξ_0 маанилерине ээ болгондой, башкача айтканда

$$\varphi(\tau_0) = \xi_0 = \left(x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\,d\tau\right) e^{A(\tau_0)}. \tag{3}$$

x_0 санын тандоого болоорун далилдейли.

Эгерде (3) туура болсо, анда (3) дөн x_0 дун бир маанилүү мааниси аныкталат:

$$x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau = \xi_0 e^{-A(\tau_0)} (A(\tau_0) \neq 0),$$
$$x_0 = \xi_0 e^{-A(\tau_0)} - \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau.$$

Табылган x_0 ду (2) ге коюп, $\big(x = \varphi(t)\big)$ ээ болобуз.

$$\varphi(t) =$$
$$= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} - \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)} =$$
$$= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)}.$$
$$\varphi(t) = \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)}.$$

Мындан, эгер $t = \tau_0$ болсо, $\varphi(\tau_0) = \xi_0$ алабыз.

Же

$$x(t) = x_0 e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}} + \int_{\tau_0}^{t} b(\tau) e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}\, d\tau.$$

<u>Мисал.</u>

Төмөнкү теңдеме берилсин:

$$x'(t) = t \cdot x(t) + sint.$$

Теңдеменин жалпы чечимин (2) формула боюнча табабыз.

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{\tau_0}^{t} b(\tau) e^{\frac{-\tau^2 + t_0^2}{2}}\, d\tau \right) e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}.$$

(1) теңдеменин чечимин башка ыкма менен тапсак болот.

$$y'(t) = a(t) y(t) \tag{4}$$

теңдемесин карайлы.

(1) теңдеме бир тектүү эмес теңдеме, ал эми (4) теңдеме (1) теңдеменин бир тектүү теңдемеси деп аталат.

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

деп алып, теңдемени төмөнкүчө түрдө жазып алабыз:

$$\frac{dy}{y} = a(t)dt \qquad (5)$$

(5)ни интегралдап,

$$ln|y| = \int a(t)dt + C_1 = A(t) + C_1$$

же

$$y = e^{A(t)+C_1} = Ce^{A(t)} \qquad (6)$$

ээ болобуз.

(6)да C ны t дан функция деп эсептеп, (1) бир тектүү эмес теңдеменин чечимин алабыз.

$$\varphi(t) = C(t)e^{A(t)} \qquad (7)$$

болсун дейли.

(7) ни (1) ге коюп,

$$\varphi'(t) = C'(t)e^{A(t)} + C(t)e^{A(t)} = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t),$$

же $C'(t)e^{A(t)} = b(t)$ ээ болобуз.

Мындан

$$C'(t) = b(t)e^{-A(t)},$$

$$C(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau)e^{-A(\tau)}\,d\tau$$

табабыз, мында x_0 – интегралдоонун турактуусу.

(1) нин жалпы чечими

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau)e^{-A(\tau)}\,d\tau\right)e^{A(t)}$$

формуласынан аныкталат.

Колдонулган метод турактууларды вариациялоо методу деп аталат.

ӨЗГӨРМӨЛӨРҮ БӨЛҮШТҮРҮЛҮҮЧҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$x'(t) = f(t)g(x) \qquad (1)$$

түрүндөгү теңдеме өзгөрмөлөрү бөлүштүрүлүүчү теңдеме деп аталат.

$f(t)$ функциясы $r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз, ал эми $g(x)$ функциясы $q_1 < t < q_2$ интервалында нөлгө айланбаган, аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун дейли.

(1) теңдемени

$$\frac{dx}{g(x)} - f(t)dt = 0 \qquad (2)$$

түрүндө жазып алууга болот.

(2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме. $F(t,x)$ функциясы

$$F(t,x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

формуласы аркылуу берилет.

(1) теңдеменин бардык чечимдери айкын эмес функция катары

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau = C \qquad (3)$$

туура келүүчүлүгүнөн алынат.

Мисалдар.

1. $x' = -\frac{t}{x}$. Бул теңдеме өзгөрмөлөрү бөлүштүрүлүүчү теңдеме

$$xdx = -tdt$$

(3) гө ылайык, жалпы чечим төмөндөгүчө аныкталат:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = -\int_{t_0}^{t} \tau\, d\tau,$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2),$$

$$x^2 + t^2 = x_0^2 + t_0^2 \equiv C^2,$$

$$x^2 + t^2 = C^2.$$

2. $\quad x \cdot x' = -t^3.$

Берилген теңдеменин жалпы чечими айкын эмес функция катары туюнтулат.

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}t^4 = C.$$

3. $\quad x' = -\frac{2x}{t}$

Жалпы чечим төмөндөгүчө аныкталат:

$$\frac{x'}{x} = -\frac{2}{t},$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2}{t} dt,$$

$$lnx = -2lnt + C,$$

$$lnx + lnt^2 = C,$$

$$\frac{x}{t^2} = e^C.$$

БИР ТЕКТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$f(t,x)$ функциясы каралсын дейли.
Эгер

$$f(kt,kx)=k^m f(t,x)$$

теңдештик орун алса, анда $f(t,x)$ функциясы m – даражадагы бир тектүү функция деп аталат.

$$M(t,x)dt+N(t,x)dx=0. \tag{1}$$

теңдемеси берилсин дейли.

Эгер (1) де $M(t,x), N(t,x)$ функциялары бирдей тартиптеги бир тектүү функциялар болушса, анда (1) тендеме бир тектүү деп аталат.

(1)де $M(t,x), N(t,x)$ функциялары переменных t жана x өзгөрмөлөрү боюнча кандайдыр бир $\mathcal{D}$ ачык областында, болгондо да $\forall(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ $(N(t,x)\neq 0)$ аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун дейли.

Мындай шарттарда (1) теңдемени төмөндөгүчө туюнтууга болот:

$$\frac{dx}{dt}=h\left(\frac{x}{t}\right). \tag{2}$$

Чындыгында, $M(t,x), N(t,x)$ функцияларын

$$M(t,x)=M\left(t\cdot 1, t\cdot\frac{x}{t}\right),$$

$$N(t,x)=N\left(t\cdot 1, t\cdot\frac{x}{t}\right).$$

түрүндө жазып алабыз. $M(t,x), N(t,x)$ функцияларынын бир тектүүлүгүн эске алып,

$$M\left(t\cdot 1, t\cdot\frac{x}{t}\right)=t^m M\left(1,\frac{x}{t}\right),$$

$$N\left(t\cdot 1, t\cdot\frac{x}{t}\right)=t^m N\left(1,\frac{x}{t}\right).$$

ээ болобуз.

Анда

$$\frac{M(t,x)}{N(t,x)} = \frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)}.$$

(1) теңдемеден

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)} \tag{3}$$

алабыз. (3) теңдеменин оң жак бөлүгү t жана x өзгөрмөлөрүнүн катышынан гана көз-каранды.

$$h\left(\frac{x}{t}\right) \equiv -\frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)}$$

белгилөөсүн кийирип, (3) нү (2) түрүндө жазып алабыз.

(2) теңдеменин чыгарылышына токтололу. Жаңы белгисиз функцияны кийиребиз

$$u(t) = \frac{x(t)}{t}.$$

$x = t \cdot u$ ээ болобуз. $x' = u + t \cdot u'$ табабыз. x тин ордуна $u + t \cdot u'$ туюнтмасын коюп, (2) ден

$$u + t \cdot u' = h(u)$$

же

$$t \cdot u' = h(u) - u \tag{4}$$

ээ болобуз. (4) теңдеме өзгөрмөлөрү бөлүштүрүлүүчү теңдеме. (4) дөн

$$\frac{du}{h(u)-u} = \frac{dt}{t} \tag{5}$$

ээ болобуз. (5) ни интегралдап,

$$\int_{u_0}^{u} \frac{d\xi}{h(\xi)-\xi} = ln|t| + C$$

айкын эмес формадагы жалпы чечимге ээ болобуз.

$$\varphi(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{d\xi}{h(\xi)-\xi}$$

белгилөөсүн кийиребиз. Анда, (2) теңдеменин жалпы чечими

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - ln|t| = C$$

түрүндө жазылат.

<u>Мисалдар.</u>

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t}$.

$x = t \cdot u$ белгилөөсүн кийирип, $\frac{dx}{dt} = u + t \cdot \frac{du}{dt}$ табабыз.

Табылган маанилерди берилген теңдемеге коюп

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = 1 + u \text{ } или \text{ } \frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

ээ болобуз. Алынган теңдемени интегралдап,

$$\int_{u_0}^{u} d\xi = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} d\tau, u - u_0 = ln|t| - ln|t_0|,$$

$$u = ln|t| + C,$$

алабыз, мында $C = u_0 - ln|t_0|$ – каалагандай турактуу.

$u = \frac{x}{t}$ болгондуктан, анда

$$x = t \cdot (ln|t| + C).$$

2. $t(t+2x)dt + (t^2 - x^2)dx = 0$

Берилген теңдемени

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(t+2x)}{x^2-t^2}$$

түрүндө туюнтабыз. Мындан

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+2\frac{x}{t}}{\left(\frac{x}{t}\right)^2 - 1}$$

келип чыгат. $\frac{x}{t} = u$ *деп,* $x = t \cdot u$, $\frac{dx}{dt} = u + t \cdot \frac{du}{dt}$ ээ болобуз.

Анда

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1+2u}{u^2-1}$$

же

$$t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1+2u}{u^2-1} - u = \frac{1+3u-u^3}{u^2-1},$$

$$\frac{(u^2-1)du}{1+3u-u^3} = \frac{1}{t}$$

Теңдеменин сол жак бөлүгүн төмөнкүчө туюнтабыз:

$$-\frac{1}{3}\frac{d(1+3u-u^3)}{1+3u-u^3} = \frac{1}{t}$$

же

$$\frac{d(1+3u-u^3)}{1+3u-u^3} = -\frac{3}{t}$$

Акыркы теңдемени интегралдап,

$$ln|1 + 3u - u^3| = -3ln|t| + C$$

ээ болобуз. Мындан

$$(1 + 3u - u^3) \cdot t^3 = e^C \equiv C_0.$$

u нун ордуна $u = \frac{x}{t}$ коюп,

$$\left(1 + 3\frac{x}{t} - \frac{x^3}{t^3}\right) \cdot t^3 = C_0,$$

$$t^3 + 3xt^2 - x^3 = C_0$$

ээ болобуз.

3. $(t^2 - x^2)dt + 2txdx = 0.$

Бул теңдемени чыгаруу үчүн төмөнкүчө туюнтабыз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-t^2}{2tx}.$$

$x = t \cdot u$ жаңы функцияны кийирип,

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{u^2-1}{2u}.$$

Мындан

$$t \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{u^2+1}{2u}$$

же

$$\frac{2u}{u^2+1} = -\frac{dt}{t}, \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\frac{dt}{t}$$

Акыркы теңдемени интегралдайбыз:

$$\int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\int \frac{dt}{t}, ln(u^2+1) + ln|t| = C,$$

$$(u^2+1)t = C, \frac{x^2+t^2}{t} = C.$$

БИР ТЕКТҮҮГӨ КЕЛТИРИЛҮҮЧҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right) \qquad (1)$$

түрүндөгү теңдемени карайлы.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

болсун дейли. Анда

$$t = \xi + \alpha,\ x = \eta + \beta,$$

жаңы өзгөрмөнү киийрип, мында ξ, η – жаңы өзгөрмөлөр; α, β – кандайдыр бир турактуу сандар, (1) теңдемени у

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right) \qquad (2)$$

түрүнө келтиребиз. (2) теңдеме бир тектүү.
α, β сандары

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

туура келүүчүлүктөрүнөн аныкталат.

Эгер

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

анда (1)

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{k(a_2t+b_2x)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right). \tag{4}$$

түрүнө ээ болот.

Чындыгында, (3) туура келүүчүлүктөн $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ *же* $a_1 = \frac{b_1}{b_2}a_2$ алабыз. a_1 маанисин (1) ге коюп,

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{\frac{b_1}{b_2}a_2t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right) = f\left(\frac{\frac{b_1}{b_2}(a_2t+b_2x)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$$

ээ болобуз.

$\frac{b_1}{b_2} = k$ белгилөөсүн кийирип, (4) гө ээ болобуз..

Эгер (4) теңдемеде $a_2t + b_2x = y$ жаңы белгисиз функцияны кийирсек, анда (4) төмөндөгүдөй түргө келет:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2}f\left(\frac{ky+c_1}{y+c_2}\right). \tag{5}$$

(5) теңдеме көз-каранды эмес өзгөрмөнү камтыбайт.

$$g(y) \equiv \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2}f\left(\frac{ky+c_1}{y+c_2}\right)$$

белгилөөсүн кийирсек, (5) теңдемени

$$\frac{dy}{g(y)} = dt$$

түрүндө жазабыз ($g(y) \neq 0$ шарты үчүн).
Бул теңдемени интегралдап,

$$\int \frac{dy}{g(y)} = t + C$$

алабыз.

Эгер $\frac{1}{g(y)}$ ти $q_1 < y < q_2$ интервалында үзгүлтүксүз функция десек, анда чечим

$$G(y) = t + C$$

түрүндө туюнтулат.

БЕРНУЛЛИНИН ТЕҢДЕМЕСИ

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^n(t) \qquad (1)$$

түрүндөгү теңдеме Бернуллинин теңдемеси деп аталат.

(1)де берилген $a(t)$, $b(t)$ функциялары $r_1 < y < r_2$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз функциялар. n – 0 жана 1 ден айырмаланган чыныгы сандар. $n = 0$ жана $n = 1$ болгон учурда (1) теңдеме сызыктуу теңдемеге айланат.

(1) теңдемени сызыктуу теңдемеге келтиребиз. Ал үчүн (1) теңдеменин эки жагын тең $x^n(t)$ га бөлөбүз. (1) теңдеме дайыма $n > 0$ үчүн $x(t) \equiv 0$ болгондо үчилтик чечимге ээ болот. Биздин милдет – үчилтик эмес чечимдерди табууда турат, б.а. $x(t) \not\equiv 0$.

Бөлүүдөн кийин

$$x^{-n}x'(t) = a(t)x^{-n+1}(t) + b(t) \qquad (2)$$

алабыз. (2) де жаңы белгисиз функцияны кийиребиз:

$$y(t) = x^{-n+1}(t).$$

Анда

$$\frac{1}{1-n}y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

ээ болобуз. $y(t)$ функциясына карата сызыктуу теңдемени алдык.

<u>Мисалдар.</u>

1. $x' = 2tx + 3t^3x^2$ теңдемеси берилсин дейли.

Бул Бернуллинин теңдемеси жана $n = 2$. Теңдеменин эки жагын тең x^2 ка бөлсөк,

$$x^{-2}x' = 2tx^{-1} + 3t^3$$

ээ болобуз. $y = x^{-1}$ деп

$$y' = -2ty - 3t^3$$

сызыктуу теңдемеге ээ болобуз. Бул теңдеменин чечими

$$y = Ce^{-t^2} + \frac{3}{2}(1 - t^2)$$

түрүнө ээ. Мындан $y = x^{-1}$ эске алып, берилген теңдеменин жалпы чечимин табабыз.

$$x(t) = \frac{1}{Ce^{-t^2} + \frac{3}{2}(1-t^2)}.$$

2. $x' + \frac{t}{1-t^2}x = t\sqrt{x}$ теңдемесин карайлы.

Эки жагын тең $\sqrt{x}$ ке бөлөбүз:

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} + \frac{t}{1-t^2}\sqrt{x} = t.$$

$\sqrt{x} = y$ белгилөөсүнөн

$$y' + \frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}y = \frac{1}{2}t$$

ээ болобуз.

Бул сызыктуу теңдемени интегралдап

$$y = C\sqrt[4]{1 - t^2} - \frac{1}{3}(1 - t^2)$$

табабыз.

Натыйжада, берилген теңдеменин жалпы чечими:

$$\sqrt{x} = C\sqrt[4]{1 - t^2} - \frac{1}{3}(1 - t^2).$$

РИККАТИНИН ТЕҢДЕМЕСИ

$$x'(t) = a(t)x + b(t)x^2 + c(t) \qquad (1)$$

түрүндөгү теңдеме Риккатинин теңдемеси деп аталат.

$a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ функцияларга карата $r_1 < y < r_2$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун деп алалы.

Мындай ырастоого ылайык

$$\Pi = \{(t, x),\ r_1 < y < r_2, |x| < +\infty\}$$

тилкесинде теорема 1дин бардык шарттары аткарылат жана каалаган $(t_0, y_0)\epsilon\Pi$ чекити аркылуу (1) теңдеменин жалгыз интегралдык ийриси өтөт.

Риккатинин теңдемеси өзгөчө учурларда гана квадратурада интегралданат.

Эгер Риккатинин теңдемесинин жалгыз x_1 жекече чечими белгилүү болсо, анда

$$x = x_1 + \frac{1}{y}, \qquad (2)$$

ордуна коюусу бул теңдемени Бернуллинин теңдемесине келтирет, мында y – жаңы белгисиз функция.

Чынында эле, (2) ни (1) ге коюп,

$$x_1' - \frac{1}{y^2} \cdot y' = a(t)x_1 + b(t)x_1^2 + c(t) + \frac{a(t)}{y} +$$
$$+2b(t)x_1 \cdot \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}.$$

ээ болобуз. x_1 – (1) теңдеменин чечими экендигин эске алсак,

$$-\frac{1}{y^2} \cdot y' = \frac{a(t)}{y} + 2b(t)x_1 \cdot \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}$$

же

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = (a(t) + 2b(t)x_1)\frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}$$ орун алат.

Эгер $\frac{1}{y} = z$ белгилесек, анда

$$z' = (a(t) + 2b(t)x_1)z + b(t) \cdot z^2 \tag{3}$$

Бернуллинин теңдемеси б.с.

$$x' = ax^2 + \frac{b}{t}x + \frac{c}{t^2}, \tag{4}$$

түрүндөгү Риккатинин теңдемеси (мында a, b, c – турактуу сандар, болгондо да $(b + 1)^2 \geq 4ac$)

$$x_1 = \frac{a_1}{t}, \tag{5}$$

түрүндөгү жекече чечимге ээ боло тургандыгын текшерүү кыйын эмес, мында a_1 – (5) ни (4) гө коюудан аныкталган кандайдыр бир турактуу.

ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛБЕГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР

Туундусуна карата чечилбеген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме

$$F(t, x, x') = 0 \tag{1}$$

түрүнө ээ. $F(t, x, x')$ үч өзгөрмөлүү функция болуп саналат. (1) туура келүүчүлүк айрым учурда x' өзгөрмөсүн t жана x өзгөрмөлөрүнүн айкын эмес функциясы катары аныктайт.

Эгер бул теңдемени x' ке карата чечүүгө мүмкүн болсо, анда

$$x' = f_k(t, x),\ k = 1,2, \dots \tag{2}$$

бир же бир нече теңдемелерди алабыз.

(1) теңдеменин чечиминин жашашы анын x' ке карата чечилүү мүмкүнчүлүгүнө жана (2) теңдеменин чечиминин жашашына байланыштуу. (1) теңдеменин чечилишинин

жетиштүү шарты айкын эмес функциянын жашашынын жана анын туундусу менен үзгүлтүксүздүк шартынан аныкталат.

Кийинки теорема орун алат.

Теорема 2. (чечимдин жашашы жана жалгыздыгы)

Эгер борбору (t_0, x_0, x_0') *чекити болгон* $\mathcal{D}_3$ *туюк үч өлчөмдүү тик бурчтугунда төмөнкүдөй шарттар аткарылса, мында* $x_0' - F(t_0, x_0, x_0') = 0$ *теңдемесинин чыныгы тамыры:*

1) $F(t, x, x')$ *функциясы* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *,* $\frac{\partial F}{\partial x'}$ *жекече туундулары менен аргументтердин жыйындысы боюнча үзгүлтүксүз;*

2) $\frac{\partial F}{\partial x'}(t_0, x_0, x_0') \neq 0$ *, анда* $t = t_0$ *чекитинин чекебелинде*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0' \tag{3}$$

шартын канааттандыруучу (1) теңдеменин $x = x(t)$ *чечими жашайт.*

Далилдөө. Теореманын 1), 2) шарттарына ылайык, (t_0, x_0, x_0') чекитинин чекебелинде

$$x'(t_0) = x_0' = f(t_0, x_0) \tag{4}$$

баштапкы шартты канааттандырган

$$x' = f(t, x) \tag{5}$$

айкын эмес функциясынын жашашынын жана жалгыздыгынын шарты аткарылсын дейли. Ошону менен бирге $f(t, x)$ функциясы $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундусу менен үзгүлтүксүз боло тургандай, борбору (t_0, x_0) чекити болгон $\mathcal{D}_2$ туюк тик бурчтугу жашайт. Бул туунду төмөнкү формула менен эсептелинет

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,f(t,x))}{\frac{\partial F}{\partial x'}(t,x,f(t,x))} \tag{6}$$

Ошентип, (4) теңдеменин оң жак бөлүгү 1-теореманын бардык шарттарын канааттандырат. Анда теңдеменин

$$x(t_0) = x_0$$

шартын канааттандыруучу кандайдыр бир $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде аныкталган, $x(t)$ жалгыз чечими жашайт.

Теорема далилденди.

Теорема 2 (1) теңдеменин чечилишине жана (2) теңдеменин ар бири үчүн чечимдин жашашына жана жалгыздыгына кепилдик берет.
Демек, эгер (1) ден (2) ни алсак жана (2) нин оң жактары теорема 1дин шарттарын канааттандырса, анда t, x өзгөрүлмөлөрүнүн кандайдыр бир $\mathcal{D}$ областындагы ар бир (t_0, x_0) чекити аркылуу (2) ар бир теңдемесине жалгыз интегралдык ийри туура келет, болгондо да алардын баары (1) теңдеменин чечимдери болот. (t_0, x_0) чекитинде (2) теңдеменин $x_k(t)$ интегралдык ийрисинин векторунун багыты $f_k(t_0, x_0)$ функциясынын маанисинен аныкталат. Эгер бул маанилер түрдүүчө болсо, анда (t_0, x_0) чекити аркылуу (2) теңдеменин саны канча болсо, ошончо интегралдык ийри өтөт. Ошондуктан (1) теңдеменин анык чечимин айырмалоо үчүн, бир гана (t_0, x_0) баштапкы берилгендерди бербестен, чечимдин $x'(t_0) = x'_0$ туундусунун маанисин да берүү керек. Албетте бул маани каалагандай берилиши мүмкүн эмес: x'_0

$$F(t_0, x_0, x'_0) = 0$$

теңдемесинин тамыры болушу керек.

<u>Мисал.</u>

$$(x')^2 - (t + x)x' + tx = 0 \tag{7}$$

теңдемесин карайлы. Аны x' ке карата чыгаруу менен

$$x' = x, \tag{8}$$
$$x' = t. \tag{9}$$

туундусуна карата чечилген эки биринчи тартиптеги теңдемеге ээ болобуз.

(8), (9) теңдеменин жалпы чечими төмөнкүдөй түргө ээ:

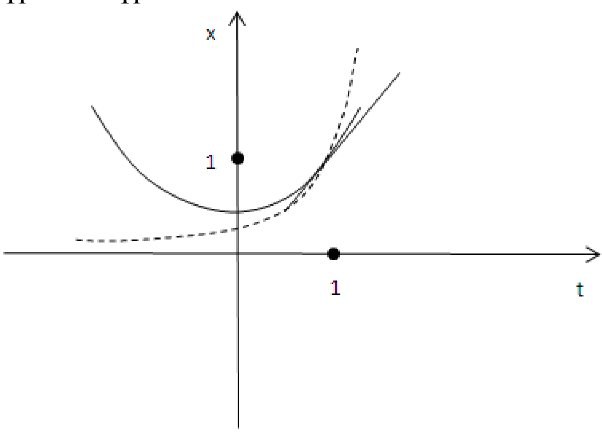
$$x = C_1 e^t, \tag{10}$$

$$x = \frac{t^2}{2} + C_2 \tag{11}$$

(10), (11) эки теңдеменин чечимдеринин тобу баштапкы теңдемени канааттандырат. Ошондой эле, жалпы чекитте жалпы жанымага ээ болушса, анда (7) теңдеменин жылмакай интегралдык ийрилери (10) топтун интегралдык ийрисинин жаасынан жана (11) топтун интегралдык ийрисиинин жаасынан түзүлгөн ийрилер болушат.

(10) топтон $x = e^{t-1}(C_1 = e^{-1})$ функциясын, ал эми (11) топтон $x = \frac{t^2+1}{2}\left(C_2 = \frac{1}{2}\right)$ функциясын алабыз.

$t = 1$ чекитинде бул функциялар менен аныкталган интегралдык ийрилер бурчтук коэффициенти 1 ге барабар болгон жалпы жанымага ээ болушат. Каралып жаткан интегралдык ийрилердин жаасынан түзүлгөн интегралдык ийри 1-сүрөттө сүрөттөлгөн.



1-сүрөт.

$x = \frac{t^2+1}{2}$ функциясынын графиги $-\infty < t \leq 1$ аралыгында аныкталган, ал эми $x = e^{t-1}$ функциясынын графиги болсо, $1 \leq t < +\infty$ аралыгында аныкталган. Ошондой эле 1-сүрөттө (10), (11) интегралдык ийрилердин жааларынан түзүлгөн башка интегралдык ийри да (үзүк сызык менен) сүрөттөлгөн. $x = \frac{t^2+1}{2}$ функциясы $1 \leq t < +\infty$ аралыгында аныкталган, ал эми $x = e^{t-1}$ функциясы $-\infty < t \leq 1$ аралыгында аныкталган.

(7) теңдеме үчүн $y = x$ түз сызыгында 2-теореманын шарты орун албастыгын жана $y = x$ түз сызыгы (7) теңдеменин чечиминин жалгыздыгы бузулган учурда чекиттердин геометриялык ордун түшүндүрөөрүн байкайбыз.

ПАРАМЕТРДИ КИЙИРҮҮ ЖОЛУ МЕНЕН ТУУНДУГА КАРАТА ЧЕЧИЛБЕГЕН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ИНТЕГРАЛДОО

Ошентип, (1) теңдеме x' ке карата чечилген жол жана туундусуна карата чечилбеген (2) теңдемеден алынгандарды интеграциялап интегралдоо мүмкүн. Бирок алынган (2) теңдемени интегралдоо көбүнчө маанилүү кыйынчылыктарды жаратып келет. Көпчүлүк учурларда (1) теңдемени интегралдоонун ыңгайлуураак ыкмалары берилет.

(1) теңдеме $x(t)$ белгисиз функциясына карата чечүүгө мүмкүн болсун дейли, башкача айтканда (1) теңдеме төмөнкүчө туюнтууга мүмкүн болот

$$x = f(t, x'). \tag{12}$$

$x' = p$ белгилөөсүн кийиребиз жана (12)

$$x = f(t, p)$$

түрүндө жазабыз. $x(t)$ функциясы (1) теңдеменин чечими болсун дейли. Анда (13) теңдештикти t боюнча дифференцирлөөгө болот.

$x(t)$ функциясы (1) теңдеменин чечими болсун дейли. Анда (13) теңдештикти t боюнча дифференцирлөөгө болот. Төмөнкүгө ээ болобуз

$$\frac{dx}{dt} = p(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt}. \tag{14}$$

(14) теңдеме p га карата сызыктуу дифференциалдык теңдеме болуп саналат жана анын чечимин

$$p(t) = \varphi(t, C) \tag{15}$$

бир параметрдик топ түрүндө жазууга болот.

Мындан (13)тү колдонуп, (1) баштапкы берилген теңдеменин чечимдеринин тобун алабыз

$$x = f(x, \varphi(x, C)). \tag{16}$$

(16) да баштапкы шарттарды эске алып, берилген баштапкы шарттарды канааттандыруучу чечимди алабыз жана C нын маанилерин табабыз.

Мисал. $(x')^2 - tx' + x = 0.$

Бул теңдемени төмөнкүчө жазып алалы

$$x = tx' - (x')^2$$

$x' =\ p$ *параметрин кийирип,*

$$x = tp - p^2 \tag{17}$$

Мындан

$$\frac{dx}{dt} = p + t\frac{dp}{dt} - 2p\frac{dp}{dt}$$

же

$$p = p + (t - 2p)\frac{dp}{dt} = 0.$$

Анда

$$(t - 2p)\frac{dp}{dt} = 0.$$

Бул теңдеме

$$p(t) = C - const$$

чечимдердин тобуна жана $p(t) = \frac{t}{2}$ чечимине ээ.

Эми (17) ни эске алып,

$$x(t) = Ct - C^2,$$

$$x(t) = t \cdot \frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4}$$

түрүндөгү чечимин алабыз.

Бул методду колдонуу мисалы катарында t жана xке карата сызыктуу

$$x = t \cdot \varphi(x') + \psi(x'). \tag{18}$$

теңдемени карайлы.

(18) теңдеме Лагранждын теңдемеси деп аталат.

(18) теңдемени t боюнча дифференцирлейли

$$x' = \varphi(x') + t \cdot \frac{d\varphi}{dx'} \cdot x'' + \frac{d\psi}{dx'} \cdot x''.$$

$x' = p$ десек, төмөндөгүгө ээ болобуз

$$p = \varphi(p) + t \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{d\psi}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

же

$$p = \varphi(p) + \left(t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)\right) \cdot \frac{dp}{dt},$$

$$\left(p - \varphi(p)\right)\frac{dp}{dt} = t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p). \qquad (19)$$

Бул теңдеме t жана $\frac{dp}{dt}$ га карата сызыктуу теңдеме жана ал оңой интегралданат. (19) ду интегралдап

$$G(t, p, c) = 0 \qquad (20)$$

ээ болобуз. (20) га (18) ди бириктирип, ($x' = p$)

$$x = t \cdot \varphi(p) + \psi(p) \qquad (21)$$

алабыз. (20) жана (21) ден изделүүчү интегралдык ийрилер аныкталат.

(19) ду алуу үчүн, биз $\frac{dp}{dt}$ га бөлдүк, ошол учурда эгер p–const десек, анда бул чечимди жоготобуз.

Эгер мындай чечим жашаса, анда ал $p - \varphi(p) = 0$ теңдемесинин чечими болушу керек. Демек, $p - \varphi(p) = 0$ теңдемеси p_k чыныгы тамырларына ээ болсо, анда Лагранждын тендемесинин табылган чечимдерине $x = t \cdot \varphi(p) + \psi(p)$, $p = p_k$ кошобуз, же p ны эске албай, $x = t \cdot \varphi(p_k) + \psi(p_k)$ – түз сызыктарга ээ болобуз.

$$x = t \cdot x' + \psi(x') \ \ (\psi(x') \not\equiv ax' + b) \qquad (22)$$

түрүндөгү теңдеме Клеронун теңдемеси деп аталат.

Ал Лагранждын теңдемесинен анын t болгон учурдагы коэффициенти x' ке барабар болгондугу менен гана айырмаланат. Клеронун теңдемесин чыгаруу үчүн, $x' = p$ белгилөөсүн кийиребиз. Анда (22)

$$x = t \cdot p + \psi(p). \qquad (23)$$

ээ болобуз. Мындан

$$dx = x'dt, pdt + [t + \psi'(p)]dp = pdt$$

орун алат.

$$[t + \psi'(p)]dp = 0.$$

Бул теңдеме эки теңдемеге ажырайт:

$$dp = 0 \text{ жана } t + \psi'(p) = 0.$$

Биринчи теңдемеден $p = C$ экендиги келип чыгат. p нын бул маанисин (23)кө коюп,

$$x = C \cdot t + \psi(C). \qquad (24)$$

алабыз. Түз сызыктардын бул тобу Клеронун теңдемесинин жалпы чечими болуп саналат.

$t + \psi'(p) = 0$ теңдемеси (23) теңдеме менен биргеликте параметрдик формадагы Клеронун теңдемесинин чечимин түзөт.

$$\left.\begin{aligned} t &= -\psi'(p), \\ x &= t \cdot p + \psi(p) \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Мисал. $x = t \cdot x' - {x'}^2$теңдемеси берилсин дейли.

Бул Клеронун теңдемеси. $x' = p$ десек,

$$x = t \cdot p - p^2$$

ээ болобуз.

Андан кийин

$$dx = x'dt = p + t \cdot dp - 2pdp$$

же

$$pdt = pdt + (t - 2p)dp.$$

Мындан $(t - 2p)dp = 0$ же $dp = 0$ жана $t - 2p = 0$ ээ болобуз. Анда $p = C$.

$p = C$ *ны* $x = t \cdot p - p^2$ теңдемеге коюп, $x = C \cdot t - C^2$ теңдеменин бир параметрдик чечимин алабыз.

Экинчи теңдемеден $t = 2p$ ни аныктайбыз жана

$$\begin{cases} t = 2p, \\ x = t \cdot p - p^2 \end{cases}$$

параметрдик формадагы Клеронун теңдемесинин чечимине ээ болобуз.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

$$x'_k(t) = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), k = 1,2, \dots, n \qquad (1)$$

дифференциалдык теңдемелер системасы n теңдемеден турган биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин нормалдык системасы деп аталат.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f(t, x) = \left(f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_n(t, x)\right) \qquad (2)$$

вектордук белгилөөлөрдү кийирүү менен (1) системаны вектордук формада жазып алабыз:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (3)$$

Векторлор жана вектордук функциялар үчүн айрым аныктамаларды жана барабарсыздыктарды орнотобуз.

(2) вектордун $|x|$ модулу же узундугу

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

формуласы менен аныкталат.
Эгер x жана y эки вектору берилсе,

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

анда барабарсыздыгы орун алат.

Бул барабарсыздыктан каалагандай сандагы $x_1, x_2, \dots, x_n$ векторлору үчүн аналогиялуу барабарсыздык орун алат:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \qquad (4)$$

$\varphi(t) = \left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\right)$ – t чыныгы өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз вектордук функция, башкача айтканда вектор координаталары t өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функциялар.

$\varphi(t)$ *функциясы* $r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган болсун, анда $r_1 < t_0 < r_2$ үчүн ошол эле интервалда

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau$$

вектордук функцияны аныктоого мүмкүн, болгондо да $\psi(t)$ векторунун $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ компоненттери

$$\psi_k(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi_k(\tau) d\tau\,, k = 1,2, \dots, n$$

формуласынан аныкталат.

$$\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau\right| \le \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)| d\tau \qquad (5)$$

барабарсыздыгы орун алат.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ өзгөрүлмөлөрүнүн мейкиндигинин Δ томпок көптүгүндө аныкталган

$$g(x) = \big(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\big),$$

вектордук функциясы берилсин дейли. Эгер Δ көптүгүнүн каалаган эки чекитин Δ көптүгүнө толук бойдон таандык болгон кесинди аркылуу туташтырсак, анда Δ көптүгү томпок деп аталат.

$$\left|\frac{\partial g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_m}\right| \le K$$

барабарсыздыгы орун алсын дейли, мында K – оң сан.

Анда Δ көптүгүнөн алынган каалаган эки x жана y чекиттери үчүн

$$|g(x) - g(y)| \le n^2 K |x - y| \qquad (6)$$

барабарсыздыгы орун алат.

(6) барабарсыздыкты далилдейли. x жана y чекиттерин туташтыруучу кесиндини кийирели:

$$z(s) = y + s(x - y),$$

мында $0 \le s \le 1$.

Качан гана s $[0,1]$ кесиндисин бойлото өтсө, анда $z(s)$ чекити x жана y чекиттерин туташтыруучу кесиндисин бойлоп өтөт, жана Δ томпоктугунан ал дайыма анда калат.

$g_k(x) - g_k(y)$ айырмасына Лагранждын формуласын колдонуп,

$$g_k(x) - g_k(y) = g_k\big(z(1)\big) - g_k\big(z(0)\big) = \frac{dg_k\big(z(s)\big)}{ds}\bigg|_{z=0}$$

алабыз.

Татаал функциядан туунду алуу формуласы боюнча $\frac{dg_k(z(s))}{ds}$ туундусун эсептеп, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{dg_k\big(z(s)\big)}{ds} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g_m\big(z_1(s),\dots,z_n(s)\big)}{\partial x_m} \cdot \frac{dz_m(s)}{ds} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g_m\big(z_1(s),\dots,z_n(s)\big)}{\partial x_m} \cdot (x_m - y_m).$$

Ошентип

$$|g_k(x) - g_k(y)| \le \sum_{m=1}^{n} K \cdot |x_m - y_m| \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{n} K \cdot |x - y| \le nK \cdot |x - y|.$$

Акыркы барабарсыздыкты квадратка көтөрүп, андан кийин аны k боюнча суммалап жана тамыр чыгарып,

$$|g(x) - g(y)| = +\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |g_k(x) - g_k(y)|^2} \le$$

$$\le n^{\frac{3}{2}} K|x - y| \le n^2 K|x - y|$$

ээ болобуз.

Эми (1) система үчүн чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теореманы формулировкалайбыз.

3-теорема. (Чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө)

1. (1) система жана (1)оң жак бөлүгү кандайдыр бир $\mathcal{D}$ ачык көптүгүндө аныкталган болсун дейли.

2. $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\frac{\partial f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_m}$ $(k = 1,2, \dots, n;$ $m = 1,2, \dots, n)$ *функциялары бул көптүктө үзгүлтүксүз болсун.*

Анда: 1. $\mathcal{D}$ *көптүгүнөн алынган каалаган* $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ *чекити үчүн* t_0 *чекитин камтыган кандайдыр бир интервалда аныкталган (1) системасынын*

$$\varphi_k(t_0) = x_{k0};\ k = 1,2, \dots, n \tag{7}$$

шарттарды канааттандырган

$$x_k = \varphi_k(t)(k = 1,2, \dots, n)$$

чечими жашайт.

2. Эгер (1) системанын

$$x_k = \varphi_k(t), x_k = \psi_k(t), k = 1,2, \dots, n$$

чечимдери

$$\varphi_k(t_0) = \psi_k(t_0), k = 1,2, \dots, n$$

шарттарын канааттандырса, анда бул чечимдер алар аныкталган интервалда дал келишет.

Берилген теореманы далилдөө теорема ди далилдөө сыяктуу эле, маанилүү эмес өзгөрүүлөр менен жүргүзүлөт.

(1) система берилсин дейли жана (7) шартын канааттандыруучу $x_k = \varphi_k(t)$ чечиминин жашашын далилдөө талап кылынат.

$x = \varphi(t)$ – (3) системанын кандайдыр бир чечими болсун, демек

$$\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big) \tag{8}$$

теңдештиги аткарылат жана

$$\varphi(t_0) = x_0, x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \tag{9}$$

болсун дейли.

Анда (8), (9) туура келүүчүлүктөрдүн жыйындысы

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau. \tag{10}$$

туура келүүчүлүктөрдүн бирине эквиваленттүү.

Бул сүйлөмдүн тууралыгы теоремада 1дей сыяктуу далилденет.

(t_0, x_0) *чекити* $\mathcal{D}$ *ачык көптүгүнө таандык болгондуктан,* $\Pi = \{(t, x), |t - t_0| \le q, |x - x_0| \le a\}$ *көптүгү жашайт, мында* q *жана* a *– кандайдыр бир оң сандар жана* $\Pi \subset \mathcal{D}$. Π көптүгү туюк жана чектелген, анда

$$|f(t, x)|, \left|\frac{\partial f_k(t, x)}{\partial x_m}\right|, k, m = 1,2, \dots, n$$

үзгүлтүксүз функциялар анда чектелген болушат, б.а.

$$|f(t, x)| \le M, \left|\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m}\right| \le K. \tag{11}$$

Π көптүгү менен катар

$$\Pi_r = \{(t, x), |t - t_0| \le r \le q, |x - x_0| \le a\} \subset \Pi$$

көптүгүн карайбыз.

$|t - t_0| \le\ r$ кесиндисинде аныкталган

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots \tag{12}$$

вектордук функциялардын удаалаштыгын түзөбүз.

$\varphi_k(t)$ вектор-функциясын

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x_k(\tau)\big)d\tau \qquad (13)$$

түрүндө аныктайбыз.

Π_r аркылуу өткөн бардык үзгүлтүксүз функциялардын графиктеринин тобун Ω_r аркылуу белгилейбиз, б.а. эгер $\varphi_k(t)\epsilon\Omega_r$, анда $|t - t_0| \leq r$ үчүн

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leq a$$

болушу керек.

Кандай шарттарда $\forall k\ (\varphi_k(t)\epsilon\Omega_r)$ экендигин аныктайбыз?

$\varphi_k(t)\epsilon\Omega_r$ болсун дейли. (13) формула боюнча $\varphi_{k+1}(t)$ аныктайлы.

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big)d\tau\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} \left|f\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big)\right|d\tau\right| (11 - \text{шарт}) \leq$$

$$\leq M|t - t_0| \leq M \cdot r$$

ээ болобуз.

Мындан, эгер $M \cdot r \leq a$ же

$$r \leq \frac{M}{a}, \qquad (14)$$

болсо, анда $\varphi_{k+1}(t)\epsilon\Omega_r$ орун ала тургандыгы келип чыгат.

(12) удаалаштыктын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейбиз.

$$|\varphi_1 - \varphi_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)d\tau\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)|d\tau\right| \leq$$

$$\leq M|t - t_0| \leq M \cdot r \leq a,$$

$|\varphi_1 - \varphi_0| \leq a$ ээ болобуз.

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \le \left|\int_{t_0}^{t} \big(f(\tau, x_1) - f(\tau, x_0)\big) d\tau\right| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_1) - f(\tau, x_0)| d\tau\right| (6 - \text{барабарсыздык}) \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} n^2 K |\varphi_1 - x_0| d\tau \le n^2 K \, |t - t_0| a \le n^2 K \, r a.$$

$$n^2 K \, r \le q_0 < 1$$

шартынын аткарылышын талап кылабыз.

Анда

$$r \le \frac{q_0}{n^2 K} \tag{15}$$

жана $|\varphi_2 - \varphi_1| \le q_0 a$.

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \le \left|\int_{t_0}^{t} \big(f(\tau, \varphi_2) - f(\tau, \varphi_1)\big) d\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi_2 - \varphi_1| d\tau\right| \le$$

$$\le n^2 K \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi_2 - \varphi_1| d\tau\right| \le q_0 a n^2 K |t - t_0| \le q_0 a n^2 K r \le q_0^2 a,$$

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \le q_0^2 a.$$

Процессти улантып

$$\forall k \epsilon N \big(|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \le q_0^k a\big) \tag{16}$$

ээ болобуз. Ошентип, (16)га ылайык, (12) функциялардын удаалаштыгы Ω_r тобуна таандык болгон кандайдыр бир $\varphi(t)$ үзгүлтүксүз функцияларга бир калыпта жыйналат.

$\varphi(t)$ функциясы (10) теңдемени канааттандыра тургандыгын көрсөтөлү. (13)тө пределге өтүү менен,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau$$

алабыз. Демек, (9) шартты канааттандырган (3) теңдеменин $x = \varphi(t)$ чечими жашай тургандыгы далилденди. $x = \varphi(t)$ чечими $|t - t_0| \le r$ интервалында аныкталган, мында r – (14) жана (15) барабарсыздыктарды канааттандырган каалагандай сан.

Чечимдин жалгыздыгын каршысынан далилдөө методу менен далилдейбиз.

$x_0 = \varphi(t_0)$, $x_0 = \psi(t_0)$ шарттарын канааттандыруучу $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ чечимдери жашасын дейли. $\varphi(t)$, $\psi(t)$ (3) теңдеменин чечимдери болгондуктан, теореманын биринчи бөлүгүнө ылайык $\varphi(t)\epsilon\Omega_r$, $\psi(t)\epsilon\Omega_r$.

Анда

$$max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\left|\left(f(\tau,\varphi(\tau)) - f(\tau,\psi(\tau)\right)\right|d\tau\right| \leq$$

$$\leq n^2 K \left|\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau) - \psi(\tau)|d\tau\right| \leq$$

$$\leq n^2 K|t - t_0| \cdot max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq$$

$$\leq n^2 Kr \cdot max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq q_0 max|\varphi(t) - \psi(t)|,$$

$$max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq q_0 max|\varphi(t) - \psi(t)|$$

ээ болобуз.

Бул $\forall t\ (|t - t_0| \leq r)$ туура келүүчүлүгү бир гана $|\varphi(t) - \psi(t)| = 0$ шарты үчүн гана орун алышы мүмкүн, б.а. качан гана $\varphi(t)$ жана $\psi(t)$ $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде дал келишкенде. Теорема далилденди.

НОРМАЛДУУ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

$$x_k' = \sum_{m=1}^{n} a_{mk}(t)x_m + b_k(t), k = 1,2,\dots,n \qquad (1)$$

түрүндөгү дифференциалдык теңдемелер системасы нормалдуу сызыктуу система деп аталат.

(1) системанын

$$x_{k0} = \varphi_k(t_0) \qquad (2)$$

шартын канааттандыруучу $x_k = \varphi_k(t)$ чечимин табуу талап кылынсын.

Коюлган маселе төмөнкү теорема аркылуу чечилет.

Теорема 4. $a_{mk}(t)$, $b_k(t)$, $m, k = 1,2, \dots, n$ *функциялары кандайдыр бир* $r_1 \le t \le r_2$ *кесиндисинде үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Анда каалагандай*

$$t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0};\ r_1 < t_0 < r_2.$$

баштапкы маанилер үчүн $r_1 \le t \le r_2$ *кесиндесинде толук аныкталган (1) системанын чечимдери жашайт.*

Далилдөө. (1) системаны жана (2) баштапкы шарттарды вектордук формада төмөнкүдөй түрдө жазабыз:

$$x = A(t)x + b(t), \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

мында $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A(t) = \big(a_{mk}(t)\big)$ *–*$n \times n$ *өлчөмдүү матрица,*

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

$$b(t) = \big(b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)\big).$$

$$f(t, x) \equiv A(t)x + b(t)$$

белгилөөсүн кийирип, (3) - (4) туура келүүчүлүгүн

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x)\, d\tau \tag{5}$$

туура келүүчүлүгүнө алмаштырабыз (мында $x(t)$ – (4) шартты канааттандырган (3) системанын чечими деп эсептейбиз).

Теорема 3төгү сыяктуу

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots \tag{6}$$

функциялардын удаалаштыгын аныктайбыз, ошону менен

$$x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_k)\, d\tau \tag{7}$$

деп алабыз.

(1) теңдеменин оң жак бөлүгү үчүн

$$\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m} = a_{mk}(t)$$

ээ болобуз жана ошонун негизинде $r_1 \le t \le r_2$ кесиндисинде

$$\left|\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m}\right| \le K, k, m = 1,2, \dots, n,$$

барабарсыздыгы орун алат, мында K – кандайдыр бир оң сан.

$x_0(t)$, $x_1(t)$ функциялары кесиндиде чектелген болгондуктан, бул кесиндиде

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le C - const$$

барабарсыздыгы орун алат.

Андан ары бул кесиндиде

$$|x_2(t) - x_1(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} |(f(\tau, x_1) - f(\tau, x_0)| d\tau\right| \le$$

$$\le n^2 KC|t - t_0|;$$

$$|x_3(t) - x_2(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} |(f(\tau, x_2) - f(\tau, x_1)| d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{(n^2K)^2 C}{2!}|t - t_0|^2;$$

....

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le \frac{(n^2K)^{k-1} C}{(k-1)!}|t - t_0|^{k-1}.$$

ээ болобуз. Мындан

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le C\,\frac{\left(n^2K(r_2 - r_1)\right)^{k-1}}{(k-1)!}$$

алабыз.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(n^2 K(r_2 - r_1)\right)^{k-1}}{(k-1)!}$ катары жыйналгандыктан, (6) удаалаштык $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде кандайдыр бир $x(t)$ үзгүлтүксүз функциясына бир калыпта жыйналат.

Бул функция үчүн

$$\left|\int_{t_0}^{t} \left(f\left(\tau, x_k(\tau)\right) - f(\tau, x(\tau)\right) d\tau\right| \leq$$

$$\leq \max_{r_1 \leq t \leq r_2} \left| \int_{t_0}^{t} \left|\left(f\left(\tau, x_k(\tau)\right) - f(\tau, x(\tau)\right)\right| d\tau \right| \leq$$

$$\leq n^2 K(r_2 - r_1)|x_k - x|$$

ээ болобуз.

Ошентип, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots$ функциялардын удаалаштыгы $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

функциясына бир калыпта жыйналат. (7) туура келүүчүлүгүндө пределге өтүү менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Теорема 4 далилденди.

Эгер (1)де бардык $b_k(t) \equiv 0$ $(k = 1,2, \dots, n)$ болсо, анда

$$y_k'(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km}(t) y_m(t) \tag{8}$$

системасы бир тектүү, ал эми (1) система $(b_k(t) \not\equiv 0)$ бир тектүү эмес деп аталат.

Вектордук формада (8) системаны төмөнкүдөй түрдө жазууга болот:

$$y' = A(t)y(t). \tag{9}$$

Төмөнкүдөй (9) теңдеменин жөнөкөй касиеттерин орнотолу.

1^0. Эгер $y = \varphi(t)$ $r_1 \leq t \leq r_2$ жана $\varphi(t_0) = 0$,

$r_1 < t < r_2$ болгондо аныкталган (9) теңдеменин чечими болсо, анда $r_1 \leq t \leq r_2$ толук кесиндиде $\varphi(t) \equiv 0$ болот.

2^0. Эгер $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – (9) теңдеменин чечимдери болсо, анда

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t),$$

функциясы да (9) теңдемесинин чечими болуп саналат, мында $c_1, c_2, \dots, c_n - const.$

Далилдөө.

1^0. $x(t) \equiv 0$ вектору (9)дун чечими болуп саналат. Анда, теорема 4түн негизинде, $\varphi(t_0) = 0$ баштапкы шартына ээ болгон $\varphi(t)$ чечими жана $x(t) \equiv 0$ чечими $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде дал келиши керек.

2^0. (9) теңдемеге түздөн-түз коюлуп текшерилет.

ЧЕЧИМДЕРДИН ФУНДАМЕНТАЛДЫК СИСТЕМАСЫ

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{10}$$

(9) теңдеменин чемдеринин системасы болсун дейли.

Эгер

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0, \tag{11}$$

болгондой бир мезгилде нөлгө айланбаган $c_1, c_2, \dots, c_n$ константалары (турактуу сандары) жашаса, анда (10) система көз-каранды деп аталат.

Эгер (11) теңдештик бир мезгилде

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$$

болгон учурда орун алса, анда (10) система сызыктуу көз-каранды эмес деп аталат.

Эгер (10) система сызыктуу көз-каранды болсо, анда (11)де эч болбосо бир $c_m \neq 0$ жашайт.

Көрсө, эгер эч болбосо $t = t_0$ бир мааниси үчүн

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0) \tag{12}$$

векторлору сызыктуу көз-каранды болсо, анда (10) чечим сызыктуу көз-каранды болот.

А. Ошентип, эгер (10) векторлор сызыктуу көз-каранды эмес болсо, анда t нын эч бир маанисинде (10) векторлор сызыктуу көз-каранды болушпайт.

Аны далилдейли. Эгер (12) векторлор сызыктуу көз-каранды болсо, башкача айтканда

$$c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0) = 0,$$

мында бардык сандар $c_1, c_2, \dots, c_n$ нөлгө барабар эмес.

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$$

болсун дейли.

2^0 касиеттин негизинде $\varphi(t)$ функциясы (9) теңдеменин чечими болуп саналат. Ошондой эле $\varphi(t_0) = 0$ болсо, анда 1^0 касиеттин негизинде $\varphi(t) \equiv 0$ болот. $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ функциялардын системасы сызыктуу көз-каранды.

Эгер (9) теңдеменин чечимдери

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{13}$$

функциялардын системасы сызыктуу көз-каранды болсо, анда ал чечимдердин фундаменталдык системасы деп аталат.

Төмөнкүлөр орун алат:

1. (9) теңдемеси үчүн дайыма чечимдердин фундаменталдык системасы жашайт.

2. Эгер (13) чечимдердин фундаменталдык системасы болсо, анда (9) теңдеменин ар бир $\varphi(t)$ чечими төмөнкү түрдө көрсөтүлөт:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \quad (14)$$

Ушул сүйлөмдү далилдейбиз.

1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ каалагандай турактуу сызыктуу көз-каранды эмес векторлордун системасы болсун дейли.

$$\varphi_k(t_0) = a_k, k = 1, \dots, n$$

баштапкы шарттары менен (13) чечимди аныктайлы.

Божомол боюнча $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ векторлору сызыктуу көз-каранды эмес, анда **А** сүйлөмүнө ылайык, (13) чечимдер сызыктуу көз-каранды эмес, башкача айтканда фундаменталдык системаны түзүшөт.

2. $\varphi(t)$ – (9) тендеменин каалагандай чечими, ал эми (13) чечимдердин фундаменталдык системасы болсун дейли. $t = t_0$ маанисин алалы жана

$$\varphi(t_0), \varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$$

аныктайлы.

(13) система чечимдердин фундаменталдык системасы болгондуктан, анда

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$$

векторлору сызыктуу көз-каранды эмес болушат жана каралып жаткан мейкиндиктин (векторлордун саны мейкиндиктин бир калыптуулугу менен дал келет) базисин түзөт. Анда бул мейкиндиктен алынган каалаган $\varphi(t_0)$ вектору базис аркылуу төмөнкүчө туюнтулат:

$$\varphi(t_0) = c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0),$$

мында $c_1, c_2, \dots, c_n$ тиешелүү түрдө тандалган турактуулар.

$\varphi(t)$ жана $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t)$ чечимдери жалпы баштапкы шартка ээ, ошол себептен дал келишет, башкача айтканда (14) орун алат.

ВРОНСКИЙДИН АНЫКТАГЫЧЫ. ФУНДАМЕНТАЛДЫК МАТРИЦА

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{15}$$

(9) теңдеменин чечимдеринин кандайдыр бир системасы болсун дейли.

$\varphi_k(t)$ чечимин координаталык формада жазабыз:

$$\varphi_k(t) = \big(\varphi_{k1}(t), \varphi_{k2}(t), \dots, \varphi_{kn}(t)\big).$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t)\varphi_{21}(t) \; \dots \; \varphi_{n1}(t) \\ \varphi_{12}(t)\varphi_{22}(t) \; \dots \; \varphi_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{1n}(t)\varphi_{2n}(t) \; \dots \; \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

матрицасын түзөбүз, бул матрицанын k -мамычасы $\varphi_k(t)$ чечимине кызмат аткарат. $\varphi_k(t)$ координаталары (8) системанын чечими болуп саналат.

Бул матрицанын аныктагычын $W(t)$ аркылуу белгилейбиз. $W(t)$ – Вронскийдин аныктагычы деп аталат.

Төмөнкү ырастоолор орун алат:

1. Эгер (15) чечимдер сызыктуу көз-каранды эмес болушса, анда $W(t)$ – Вронскийдин аныктагычы t нын эч бир маанисинде нөлгө айланбайт. Бул учурда (15) система чечимдердин фундаменталдык системасы болуп саналат.

2. Эгер (15) система сызыктуу көз-каранды болсо, анда Вронскийдин аныктагычы теңдеш түрдө нөлгө барабар болот.

3. (15) система чечимдердин фундаменталдык системасы болгон учурда (16)ны фундаменталдык матрица деп атайбыз. t өзгөрүлмөлүү функциялардан түзүлгөн жана кандайдыр бир шарттарды канааттандыруучу каалагандай

n – тартиптеги квадраттык матрица кандайдыр бир (8) түрдөгү теңдемелер системасы үчүн фундаменталдык болуп саналат.

1 –3-сүйлөмдөрдү далилдейли. 1-2-ырастоолордун туура экендиги анык.

3тү далилдейли. (16) t өзгөрүлмөлүү функциялардын каалагандай берилген матрицасы болсун дейли. Функциялар $r_1 < t < r_2$ интервалында үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болсун дейли. $\forall\, t\epsilon(r_1, r_2)$ $(W(t) \neq 0)$. Координатасы (16) матрицанын k – мамычасын түзгөн $\varphi_k(t)$ вектордук функциясы (9) теңдеменин чечими болуп saналсын дейли.

$$\varphi'_{kj}(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{mj}(t) \cdot \varphi_{km}(t),\ j, k = 1,2, \dots, n \quad (17)$$

ээ болобуз.

Эгер (17)де j индексин бекемдеп жана k гана өзгөрөт деп эсептесек, анда алынган туура келүүчүлүктөрдүн системасын $a_{mj}(t)$ $(j, m = 1,2, \dots, n)$ белгисиздерине карата сызыктуу алгебралык теңдемелердин системасы катары кароого болот.

Бул система бир маанилүү чечилүүчү, анткени анын матрицасы (16) матрицадан транспонирлөө жолу менен алынат жана аныктагычы нөлдөн айырмалуу. Ошентип $a_{mj}(t)$ функциясы $\varphi'_{kj}(t),\ \varphi_{kj}(t)$ үзгүлтүксүз функциялары аркылуу бир маанилүү аныкталат.

ЛИУВИЛЛДИН ФОРМУЛАСЫ

Аныктагычты дифференцирлөө эрежеси

$(\varphi_{km}(t))$ – n-тартиптеги квадраттык матрица, ошону менен бирге $\varphi_{km}(t)$ функциялары дифференцирленүүчү болуп саналат. Бул матрицанын аныктагычын $W(t)$ аркылуу белгилейли.

Бул аныктагычтын $W'(t)$ туундусу төмөнкү формула боюнча эсептелет:

$$W'(t) = W_1(t)+\ldots+W_n(t). \tag{18}$$

$W_m(t)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ кошулуучусу төмөнкүчө түрдө аныкталат: $(\varphi_{km}(t))$ матрицасында m – сапчадагы бардык мүчөлөрдү t боюнча дифференцирлеп, калган сапчадагыларды өзгөрүүсүз калтырылат. Албетте, сапча жана мамычанын ролун алмаштырууга болот.

$W(t)$ – (8) теңдеменин чечимдеринин фундаменталдык системасынын Вронский аныктагычы болсун, анда төмөнкү формула орун алат:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} s(\tau)d\tau}, \tag{19}$$

мында $s(t)$ – $A(t)$матрицасынын изи:

$$s(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t)+\ldots+a_{nn}(t).$$

(19) Лиувиллдин формуласы деп аталат.

СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

Сызыктуу бир тектүү эмес теңдемелердин системасы берилсин дейли

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t). \tag{1}$$

(1)ге туура келүүчү бир тектүү теңдемени карайлы

$$y'(t) = A(t)y(t)) \tag{2}$$

$y = \varphi(t)$ – (2) теңдеменин каалагандай чечими болсун жана $x^* = \psi(t)$ (1) теңдеменин кандайдыр бир чечими болсун дейли. Анда (1) теңдеменин каалаган чечимин төмөнкүчө түрдө жазууга болот:

$$x = \varphi(t) + \psi(t). \tag{3}$$

Бул сүйлөмдүн тууралыгы (3)нү (1)ге түздөн-түз коюу менен текшерилет.

Эми (1) теңдеменин чечимдерин табуу методу менен таанышабыз.

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \qquad (4)$$

(2) бир тектүү теңдеменин чечимдеринин фундаменталдык системасы болсун дейли. (1) чечимди төмөнкүчө түрдө издейбиз

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t), \qquad (5)$$

мында $c_1(t), \dots, c_n(t)$ – функциялары белгисиз t өзгөрүлмөсүнөн көз-каранды функциялар болуп саналышат.

(5)ни (1) теңдемеге коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n'(t)\varphi_n(t) + c_1(t)\varphi'(t) + \dots +$$
$$+c_n(t)\varphi_n'(t) =$$
$$= A(t)\big(c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t)\big) + b(t).$$

Мындан, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – (2) теңдеменин чечимдери экендигин эске алып, төмөнкүнү алабыз:

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n'(t)\varphi_n(t) = b(t) \qquad (6)$$

Координаталык формада жазылган $c_1'(t), \dots, c_n'(t)$ карата (6) теңдеме төмөнкү түргө ээ:

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi_{mk}(t) \cdot c_m'(t) = b_k(t), k = 1,2, \dots, n. \quad (7)$$

$\Phi(t) = \big(\varphi_{mk}(t)\big)$ (2) теңдеменин фундаменталдык матрицасы болсун дейли. Анда (7) туура келүүчүлүгүн төмөнкүчө жазууга болот:

$$\Phi(t) \cdot c'(t) = b(t).$$

Мындан $c'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$ же

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(t)b(t)\,dt, \qquad (8)$$

табабыз, мында $\Phi^{-1}(t)$ – матрицасы $\Phi(t)$ матрицасына тескери матрица. (5) формуланы төмөнкүдөй түрдө

$$x_k(t) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_{mk}(t) \cdot c_m(t),\ k = 1,2,\dots,n, \text{ же}$$

$$x = \Phi(t)c(t) \qquad (9)$$

вектордук түрдө жазсак болот.

(8)ни (9) га коюп төмөнкүнү алабыз:

$$x = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)b(t)dt \qquad (10)$$

Ошентип, (10) формула (1) теңдеменин жалпы чечимин берет. t_0, x_0 баштапкы маанилери менен берилген (1) бир тектүү эмес теңдеменин чечими төмөкүчө түрдө берүүгө болот:

$$x = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right). \qquad (11)$$

Эгер $t = t_0$ болсо, $x(t_0) = x_0$ ээ болобуз. (11)ни (1)ге коюп, чынында (11) – (1)нин чечими болооруна ынанабыз.

n – ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕ

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ \dots + a_n(t)y(t) = b(t) \qquad (1)$$

түрүндөгү теңдеме n -тартиптеги сызыктуу теңдеме деп аталат. $a_1(t),\dots,a_n(t),b(t)$ функциялары $r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз деп болжолдойбуз.

Эгер $b(t) \equiv 0$ болсо, анда төмөнкү теңдемени алабыз:

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)}(t) + \ \dots + a_n(t)z(t) = 0 \qquad (2)$$

(2)теңдеме (1)теңдеменин бир тектүү теңдемеси деп аталат. (1) теңдеме бир тектүү эмес теңдеме деп аталат.

(1)теңдемени нормалдуу сызыктуу системага келтирүүгө болот. Ал үчүн жаңы белгисиз функцияларды кийиребиз:

$$x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}.$$

Анда бул жаңы белгисиз $x_1, \dots, x_n$ функциялар сызыктуу системаны канааттандырат:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \ \dots - a_1(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

Алынган системаны вектордук формада төмөнкүчө түрдө жазууга болот:

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{3}$$

мында $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$A(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

$$b(t) = (0, 0, \dots, b(t))$$

Ошентип, (1) тендемени изилдөө менен (3) нормалдуу сызыктуу системаны изилдөөгө келтирүүгө болот.

ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)}(t) + \ \dots a_{n-1} z' + a_n z^n = f(t), \qquad (1)$$

түрүндөгү теңдеме n –тартиптеги турактуу коэффициенттүү сызыктуу теңдеме деп аталат, мында z – белгисиз функция, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – турактуу сандар, $f(t)$ – берилген функция;

Эгер $f(t) \equiv 0$ болсо, анда теңдеме бир тектүү деп, тескерисинче учурда бир тектүү эмес деп аталат.

БИР ТЕКТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ \dots a_{n-1} z' + a_n z = 0 \qquad (2)$$

теңдемеси берилсин дейли.

(2)теңдеменин чечимин

$$z = e^{\lambda t} \qquad (3)$$

түрүндө издейбиз, мында λ – кандайдыр бир сан (чыныгы же комплекстик).

(3)нү (2)ге коюп

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \ \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = 0,$$

же

$$e^{\lambda t} \cdot (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0$$

ээ болобуз.

$\forall t \epsilon (-\infty, \infty) (e^{\lambda t} \neq 0)$, анда

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (4)$$

болушу керек. (4)нүн сол жагындагы көп мүчө λ га карата (2)теңдеменин мүнөздүк көп мүчөсү, ал эми (4) мүнөздүк теңдеме деп аталат.

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

деп белгилейбиз. Алгебра курсунан белгилүү болгондой, (4) теңдеме эселүүлүктөрүн эске алуу менен, n тамырга ээ болот.

Алгач, (4) теңдеме n түрдүү тамырга ээ болгон, башкача айтканда эселүү тамырларга ээ болбогон учурларды карайбыз. Бул учур үчүн (2) теңдеменин бардык чыгарылыштарынын жыйындысы төмөнкү теорема менен мүнөздөлөт.

Теорема 5. $L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчөсү $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n түрдүү тамырларга ээ болсун дейли.

Анда (2) теңдеменин жалпы чечимин төмөнкүчө түрдө туюнтууга болот:

$$z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \qquad (5)$$

мында $c_1, c_2, \dots, c_n$ – каалагандай турактуулар.

Далилдөө. (5) – (2) теңдеменин чечими болуп саналат, (5)ни (2)ге түздөн-түз коюу аркылуу текшерилет.

Эгер z_* - (2) теңдеменин кандайдыр бир чечими болсо, анда (5) ден $c_1, c_2, \dots, c_n$ сандарын тиешелүү тандоодон z_*ду алууга болот. Ушундай мааниде (5) – (2) тендеменин жалпы чечими болуп саналат.

z_* чечимин $-\infty < t < +\infty$ болгондо аныкталган болсун дейли

$$z_*(0) = z_0, z_*'(0) = z_0', \dots, z_*^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

$c_1, c_2, \dots, c_n$ константаларын (5) формула менен аныкталуучу $z(t)$ чечим ошол эле баштапкы шарттарды канааттандыргандай тандоого боло тургандыгын көрсөтөлү.

$$z(0) = z_0,\ z'(0) = z_0', \dots, z^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}. \qquad (6)$$

(5) ден (6)ны эске алып

$$c_1 \lambda_1^m + c_2 \lambda_2^m + \dots + c_n \lambda_n^m = z_0^{(m)}, \qquad (7)$$

$m = 0,1,2, \dots, n-1$ алабыз.

(7) туура келүүчүлүгү $c_1, c_2, \dots, c_n$ белгисиздерине карата n теңдемеден турган системаны берет.

Системанын матрицасы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

түрүнө ээ. Бул матрицанын аныктагычы (Вандермонддун аныктагычы) нөлдөн айырмалуу, анткени бардык $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сандары түрдүүчө түгөйлөш. Анда (10) системадан $c_1, c_2, \dots, c_n$ турактуулар бир маанилүү аныкталат. Ошентип, (7) шартын канааттандыруучу $z(t)$ чечими аныкталат. z_* жана z чечимдери бир эле баштапкы шартты канааттандырат, ошол себептен алар дал келишет.
Теорема далилденди.

$L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчөсү эселүү тамырларга ээ болгон учурду карайлы.

Теорема 6. *$L(\lambda)$ түгөйлөш түрдүү $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ $(m < n)$ тамырларга ээ болот, болгондо да λ_j $(j = 1,2, \dots, m)$ тамыры k_j – эселүүлүккө ээ, демек*

$$k_1 + k_1 + \dots + k_m = n.$$

Анда бардык функциялар

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = te^{\lambda_1 t}, \dots, z_{k_1} = t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \\ z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 t}, z_{k_1+2} = te^{\lambda_2 t}, \dots, z_{k_1+k_2} = t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} = e^{\lambda_m t}, z_{k_1+\dots+k_{m-1}+2} = te^{\lambda_m t}, \dots, z_n = t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{cases} \quad (8)$$

(2) теңдеменин чечимдери болуп саналат.

(2) теңдеменин жалпы чечими

$$z = c_1 z_1 + \dots + c_n z_n, \quad (9)$$

түрүндө туюнтулат, мында $c_1, c_2, \dots, c_n$ – каалагандай турактуулар.

6-теоремадан жалпы чечимди

$$z = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ \dots + f_m(t)e^{\lambda_m t}, \quad (10)$$

түрүндө жазууга боло тургандыгы келип чыгат, мында $f_j(t)$ көп мүчөсү $k_j - 1, j = 1,2, \dots, n$ сандарынан ашып кетпеген даражадагы көп мүчө болуп саналат.

Чынында эле, (8) системанын ар бир функциясы (2)теңдеменин чечими экендигин текшерүү кыйын эмес.

Анда (9) туура келүүчүлүгү менен туюнтулган сызыктуу комбинация (2) теңдеменин чечими болуп саналат. (9)дан айтылган ырастоонун тууралыгы келип чыгат.

Мисалдар.

1. $z^V + 3z^{IV} + z^{III} + z^{II} = 0.$

Берилген теңдеменин мүнөздүк көп мүчөсү төмөнкүдөй түргө ээ:

$$L(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1)$$
$$= \lambda^2(\lambda + 1)^3$$

Бул көп мүчөнүн тамырлары болуп, тиешелүү түрдө $k_1 = 2, k_2 = 3$ эселүүлүккө ээ болгон $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ сандары эсептелет.

6-теоремага ылайык, (8) чечимдердин системасы төмөнкүдөй түргө ээ:

$$z_1 = 1, z_2 = t, z_3 = e^{-t}, z_4 = te^{-t}, z_5 = t^2e^{-t}.$$

Жалпы чечимди төмөнкүчө түрдө туюнтууга болот:

$$z = (c_1 + c_2 t) + (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-t}$$

2. $z^V + 2z^{III} + z^I = 0$ теңдемесин чыгаралы.

Мүнөздүк көп мүчө

$$L(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda(\lambda^2 + 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$ *(жөнөкөй)* $\lambda_2 = i$ *(эки эселүү),* $\lambda_3 = -i$ *(эки эселүү) тамырларга ээ.*

(8) система

$$z_1 = 1, z_2 = e^{it}, z_3 = te^{it}, z_4 = e^{-it}, z_5 = te^{-it}$$

түрүнө ээ, анын жалпы чечимин төмөнкүчө жазууга болот:

$$z = c_1 + (c_2 + tc_3)e^{it} + (c_4 + tc_5)e^{-it}.$$

3. $z^{III} - 5z^{II} + 6z^{I} = 0$ теңдемесин карайлы.

Мүнөздүк көп мүчө төмөнкүдөй түргө ээ:

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Көп мүчөнүн тамырлары болуп түрдүү тамырлар болгон $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ сандар эсептелет. Анда теорема 5ке ылайык, жалпы чечим $z = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$ түрүндө туюнтулат.

4. $z^{III} + 3z^{II} + 9z^{I} - 13z = 0$ теңдемеси үчүн мүнөздүк көп мүчө төмөнкүдөй түргө ээ:

$$L(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = \lambda^3 - 1 + 3\lambda^2 - 3 + 9\lambda - 9 =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) + 3(\lambda^2 - 1) + 9(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1 + 3\lambda + 3 + 9) =$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 13).$$

Мүнөздүк көп мүчөнүн тамырлары: $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$. Теорема 5ке ылайык, жалпы чечим

$$z = c_1e^{t} + c_2e^{(-2+3i)t} + c_3e^{-(2+3i)t}$$

түрүндө туюнтулууга тийиш.

5. $z^{III} - z = 0$. Мүнөздүк көп мүчө төмөнкүдөй түргө ээ:

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 1 = 0.$$

Тамырлары болуп $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ сандары эсептелет. Анда жалпы чечим төмөнкүдөй түргө ээ болот:

$$z = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t} + c_3 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}.$$

Жыйынтыгында, төмөнкүлөрдү белгилеп кетели:

Эгер $L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчө түрдүү $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ тамырларга ээ болсо, анда

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = e^{\lambda_2 t}, \ldots, z_n = e^{\lambda_n t} \quad (11)$$

функциялардын системасы (2) теңдеменин чечимдеринин фудаменталдык системасын түзөт; эгер $L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчөсү λ_1 - k_1 – эселүү, λ_2 - k_2 – эселүү, λ_m - k_m – эселүү ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$) тамырларга ээ болсо, анда (8) функциялардын системасы чечимдердин фундаменталдык системасын түзөт. Бул сүйлөмдү далилдөө үчүн (11) системанын Вронский аныктагычын (түрдүү тамырлар учуру) түзөлү.

$$W(t) = \begin{vmatrix} z_1 & \ldots & z_n \\ z_1' & \ldots & z_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n^{n-1} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t}.$$

$\forall t \epsilon (-\infty, +\infty)(W(t) \neq 0)$. Натыйжада, (11) система сызыктуу көз-каранды эмес болот жана чечимдердин фундаменталдык системасын түзөт.

Экинчи учур ушундай эле далилденет.

БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕ

(1) теңдемени карайлы.

Текшерүүнү жүргүзүү (түздөн-түз ордуна коюу менен) кыйынчылык туудурбайт: жалпы чечимди табуу үчүн, $z_{\text{оо}}$ – бир тектүү теңдеменин жалпы чечимин жана $z_{\text{чн}}$ – бир тектүү эмес теңдеменин жекече чечимин табуу жана аларды кошуп коюу жетиштүү, башкача айтканда

$$z_{жбэ} = z_{жб} + z_{жекбэ}.$$

Бир тектүү тендеменин жалпы чечими теорема 5, 6дан аныкталат. Бир тектүү эмес теңдеменин жекече чечимин табуу калат. (1) теңдеменин жекече чечимин табуу үчүн төмөнкүдөй учурларды карайбыз:

1. $f(t) = \mathcal{P}(t)$, мында $\mathcal{P}(t)$ – t дан көп мүчө (полином).

Эгер 0 (нөл) саны $L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болуп саналбаса, анда бир тектүү эмес теңдеменин жекече чечимин төмөнкүдөй түрдө табууга болот:

$$z_{жекбэ} = Q(t),$$

мында $Q(t)$ – көп мүчө, анын тартиби $\mathcal{P}(t)$ нын тартиби кандай болсо ошондой, бирок коэффициенттери белгисиз.

Эгер 0 саны K эселүүлүктөгү мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болсо, анда

$$z_{жекбэ} = t^k Q(t),$$

$Q(t)$ көп мүчөсү $\mathcal{P}(t)$ көп мүчөсүнүн тартиби менен бирдей.

Q(t) көп мүчөнүн коэффициенттерин аныктоо үчүн белгисиз коэффициенттер методу пайдаланылат.

Төмөнкү мисалды карап көрөлү.

$$z^{II} - 2z^{I} - 3z = 3t^2 + 1$$

теңдемеси берилсин дейли.

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

мүнөздүк көп мүчөсү $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ тамырларына ээ.

Теңдеменин жекече чечимин төмөнкүдөй түрдө издейбиз:

$$z_{жекбэ} = at^2 + bt + c,$$

мында a, b, c – кандайдыр бир сандар.

a, b, c сандарын аныктоо үчүн, $z_{\text{жекбэ}}$ функциясын берилген теңдемеде туюнтабыз:

$$z'_{\text{жекбэ}} = 2at + b, z''_{\text{жекбэ}} = 2a.$$

$$2a - 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) = 3t^2 + 1$$

ээ болобуз.

Мындан, көп мүчөлөрдүн барабардыгын пайдаланып, төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ -4a - 3b = 0 \\ \ \ 2a - 2b - 3c = 1 \end{cases} \qquad \text{же} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{4}{3} \\ c = -\frac{17}{9} \end{cases}$$

$z_{\text{жекбэ}}$ жекече чечим жана $z_{\text{жб}}$ жалпы чечим төмөндөгүдөй түрдө болот:

$$z_{\text{жекбэ}} = -t^2 + \frac{4}{3}t - \frac{17}{9}. \ z_{\text{жб}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}.$$

Жалпы чечимди мындайча жазууга болот:

$$z_{\text{жбэ}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \left(-t^2 + \frac{4}{3}t - \frac{17}{9}\right).$$

2. $f(t) = \mathcal{P}(t)e^{at}$.

Эгер a саны мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болбосо, анда

$$z_{\text{жекбэ}} = Q(t)e^{at}.$$

Эгер a – k эселүү тамыр болсо, анда

$$z_{\text{жекбэ}} = t^k Q(t)e^{at}.$$

Каралып жаткан учурда $Q(t)$ көп мүчөсү $\mathcal{P}(t)$ кандай тартипте болсо, ошондой тартипте. Эки учурда тең $z_{\text{жекбэ}}$ чечимдерин (1)ге коюп, $Q(t)$ көп мүчөсүнүн коэффициенттерин аныктайбыз.

3. $f(t) = e^{ax}(\mathcal{P}_1(t)cosbt + \mathcal{P}_2(t)sinbt)$,

мында $\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t)$ – tдан көп мүчөлөр. m - $\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t)$ көп мүчөлөрдүн тартиптеринин эң чоңу. Анда, эгер $a + ib$ саны мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болбосо,

$$z_{\text{жекбэ}} = e^{at}(Q_1(t)cosbt + Q_2(t)sinbt),$$

орун алат, мында $Q_1(t), Q_2(t)$ – m-тартиптеги көп мүчөлөр.

Эгер $a + ib$ мүнөздүк теңдеменин k – эселүүлүктөгү тамыры болсо, анда

$$z_{\text{жекбэ}} = t^k e^{at}(Q_1(t)cosbt + Q_2(t)sinbt)$$

болот.

4. Эгер $f(t)$ төмөнкүдөй түрдө туюнтулса,

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_m(t),$$

мында $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ айрым функциялар (балким 1-3тө каралган түрдө болушу мүмкүн).

Эгер $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_m(t)$ (1) теңдеменин

$$f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$$

$$\left(z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ \ldots + a_n z = f_j(t), j = 1,2, \ldots, m\right)$$

функцияларына туура келген жекече чечимдери болсо, анда

$$z_{\text{он}} = z_1(t) + \ z_2(t) + \ldots + z_m(t).$$

<u>Мисалдар.</u>

1. $z^{II} - z^I = e^t + t$ бир тектүү эмес сызыктуу теңдемесин карайлы.

Тиешелүү бир тектүү теңдеме болуп төмөнкү теңдеме эсептелет:

$$z^{II} - z^I = 0.$$

Мүнөздүк көп мүчө төмөнкүдөй түргө ээ:

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 1 = \lambda(\lambda - 1).$$

Көп мүчөнүн тамырлары болуп, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ сандары эсептелет.

Бир тектүү теңдеменин жалпы чечимин

$$z_{жб} = c_1 + c_2 e^t$$

түрүндө туюнтууга болот.

Эми бир тектүү эмес теңдеменин $z_{жекбэ}$ жекече чечимин табалы. Бир тектүү эмес теңдеменин оң жак бөлүгү эки функциянын суммасы түрүндө туюнтулган, б.а.

$$f(t) = e^t + t.$$

Жекече чечимди 4-учурга ылайык табабыз. Ал үчүн

$$z^{II} - z^{I} = e^t, \qquad z^{II} - z^{I} = t$$

теңдемелерин карайбыз.

1 саны мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болгондуктан, $z_1(t)$ жекече чечимин $z_1 = Ate^t$ түрүндө издейбиз, мында A – кандайдыр бир турактуу сан. Биринчи теңдемеге

$$z_1' = Ae^t + Ate^t,$$

$$z_1'' = Ae^t + Ae^t + Ate^t = 2Ae^t + Ate^t$$

коюп, $2Ae^t + Ate^t - Ae^t - Ate^t = e^t$ ээ болобуз.

Мындан

$$Ae^t = e^t$$

же $A = 1$. Ошентип, биринчи теңдеменин жекече чечими болуп, төмөнкү функция эсептелет:

$$z_1(t) = te^t$$

$\lambda_1 = 0$ саны мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болуп саналат. Анда 1-учурга ылайык, жекече чечимди

$$z_2(t) = t(At + B)$$

түрүндө издейбиз.

A жана B сандарын табабыз. Ал үчүн

$$z_2' = 2At + B, z_2'' = 2A$$

табабыз.

Табылган функцияларды экинчи теңдемеге коюп,

$$2A - 2At - B = t$$

ээ болобуз.

Мындан A жана B ларды аныктоо үчүн төмөнкү теңдемелерди алабыз:

$$\begin{cases} -2A = 1, \\ 2A - B = 0. \end{cases}$$

Бул системаны чыгарып $A = -\frac{1}{2}, B = -1$ алабыз. Анда

$$z_2 = -t\left(\frac{1}{2}t + 1\right) = -\frac{1}{2}t^2 - t.$$

4гө ылайык, берилген теңдеменин жалпы чечимин

$$z_{0н} = c_1 + c_2e^t + te^t - \frac{1}{2}t^2 - t$$

түрүндө жазууга болот.

ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ СИСТЕМАЛАР

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m + f_k(t), \quad k = 1,2, \dots, n \qquad (1)$$

түрүндөгү дифференциалдык теңдемелер системасы турактуу коэффициенттүү сызыктуу бир тектүү эмес система деп аталат, мында x_m - белгисиз функция, a_{km} – турактуу сандар, $f_k(t)$ - берилген функциялар;

Эгер (1)де бардык $f_k(t) \equiv 0$ болсо,

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{m=1}^{n} a_{km}y_m, k = 1,2, \dots, n \qquad (2)$$

ээ болобуз.

(2) система (1)ге туура келген бир тектүү система деп аталат.

(1) системанын жалпы чечими төмөнкү эреже боюнча табылат: (2) системанын жалпы чечими табылат, андан кийин (1) системанын кандайдыр бир жекече чечими табылат. Эки чечимдин суммасы (1) системанын жалпы чечими болуп саналат.

(1)жана (2) системаларды вектордук формада

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \qquad (4)$$

түрүндө жазабыз.

Мында $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $A = (a_{mk})$, $(k, m = 1,2, \dots, n)$, $f(t) = \big(f_1(t),\ f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$.

(4) системанын жалпы чечимин $y_{ж}$, ал эми (3) системанын жекече чечимин $x_{жек}$ аркылуу белгилейбиз. Анда (3) системанын $x_{ж}$ жалпы чечимин

$$x_{ж} = y_{ж} + x_{жек} \qquad (5)$$

түрүндө жазууга болот.

$y_{ж}$ жалпы чечимди табабыз.

Эгер кандайдыр бир λ саны жана кандайдыр бир η вектору үчүн

$$A \cdot \eta = \lambda\eta \qquad (6)$$

туура келүүчүлүгү орун алса, анда λ саны өздүк маани деп, ал эми η вектору A матрицасынын өздүк вектору деп аталат.

С$_1$. A матрицасы λ өздүк санына жана η өздүк векторуна ээ болсун дейли. Анда

$$y = \eta e^{\lambda t} \qquad (7)$$

вектордук функция (4) теңдеменин чечими болуп саналат.

Чындыгында, (7)ни (4)гө коюп, $\lambda\eta e^{\lambda t} = A \cdot \eta e^{\lambda t}$алабыз.

Мындан $A \cdot \eta = \lambda\eta$ ээ болобуз.

Айтылгандардын тууралыгы далилденди. (6) туура келүүчүлүктөн

$$(A - \lambda E)\eta = 0 \quad (8)$$

алабыз, мында E – n-тартиптеги бирдик матрица.

Эгер (8)де η нөл эмес вектор болсо, анда

$$det|A - \lambda E| = 0 \quad (9)$$

болушу керек, башкача айтканда $(A - \lambda E)$ матрицасынын аныктагычы нөлгө барабар болушу керек.

(9) дун сол жак бөлүгү λ га карата n –тартиптеги кандайдыр бир көп мүчөнү аныктайт.

(9) теңдеме (4) системанын мүнөздүк теңдемеси деп аталат, ал эми көп мүчө мүнөздүк көп мүчө деп аталат (турактуу коэффициенттүү n -тартиптеги сызыктуу теңдеме менен салыштыргыла).

Эгер $\lambda = \lambda_j$ мааниси белгилүү болсо, анда бул маанини (9)га коюп, λ_jга туура келүүчү h нөл эмес векторун аныктоого болот.

Төмөнкүдөй учурларды карап көрөлү:

1. (9) теңдеменин тамырлары түрдүү. Төмөнкү теорема орун алат:

Теорема *6. Матрица* n *түрдүү өздүк маанилерге ээ болсун дейли:* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *жана* $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ – *A матрицасынын тиешелүү өздүк векторлору.*

$$y_j = \eta_j e^{\lambda_j t}, j = 1,2, \dots, n \ (y_j \text{ – вектордук функция})$$

болсун дейли.

Анда

$$y_{об} = c_1y_1 + c_2y_2 + \ ... + c_ny_n \qquad (10)$$

вектордук функциясы (4) системанын жалпы чечими болуп саналат.

Далилдөө. (10) – (4) системанын чечими болуп саналат, ал түздөн-түз ордуна коюу аркылуу текшерилет. Мында C_1 сүйлөмүн эске алуу керек. (10) – (4) системанын жалпы чечими экенин далилдейбиз. Бул, эгер $\varphi(t)$ – (4) системанын $\varphi(t_0) = x_0$ шартын канааттандыруучу кандайдыр бир чечими болсо, анда тиешелүү түрдө $c_1, c_2, ..., c_n$ турактууларды аныктоо менен $\varphi(t)$чечимин

$$\varphi(t) \ = c_1y_1 + c_2y_2 + \ ... + c_ny_n \qquad (11)$$

түрүндө туюнтууга болот.

Бизге $c_1, c_2, ..., c_n$ сандарын тандоо мүмкүнчүлүгүн көрсөтүү калды. $\varphi(t)$ чечимин бүткүл $-\infty < t < +\infty$ түз сызыгында аныкталган деп эсептөөгө болот. Жалпылыкты чектебестен, $t_0 = 0$ алууга болот.

(11) де $t = 0$ду алабыз. Анда

$$\varphi(0) = x_0 = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ ... + c_n\eta_n.$$

Биз x_0 векторунун $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ базиси боюнча ажыралмасын алдык ($\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ векторлору базисти түзөт).

(10)до, $t = 0$ деп эсептеп,

$$x(0) = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ ... + c_n\eta_n$$

ээ болобуз.

$c_1, c_2, ..., c_n$ лердин бир эле маанилеринде $\varphi(t)$ жана $x(t)$ чечимдеринин баштапкы маанилери $t = 0$ болгондо, дал келишет, анда теорема 4кө ылайык, бул чечимдер аныкталуу интервалында дал келишет. Теорема далилденди.

2. (9) теңдеме эселүү тамырларга ээ, б.а. A матрицасы эселүү өздүк маанилерге ээ. λ – k эселүү тамыр болсун дейли. Анда λ өздүк маанисине $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ өздүк векторлорунун сериясы туура келет. A матрицасы үчүн

$$A\eta_1 = \lambda\eta_1, A\eta_2 = \lambda\eta_2 + \eta_1, \dots, A\eta_k = \lambda\eta_k + \eta_{k-1}$$

туура келүүчүлүктөрү орун алат.

$$\omega_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_2 + \ \dots + \eta_r,\ r = 1,2, \dots, \quad (12)$$

вектордук функциялардын удаалаштыгын аныктайлы.

Анда

$$y_r = \omega_r(t)e^{\lambda t}, r = 1,2, \dots, k \quad (13)$$

вектордук функциялар (4) теңдеменин чечими болуп саналышат, болгондо да

$$y_r(0) = \eta_r.$$

Ошентип, k векторлорунун ар бир сериясына kчечимдерден турган система туура келет.

C_2. (13) функциялардын системасы (4) системанын чечими болуп саналаарын далилдейли. Алгач, төмөнкү туура келүүчүлүктөрдүн тууралыгын далилдеп алалы.

$$\omega_r'(t) = \omega_{r-1}(t), \quad (14)$$

$$A\omega_r(t) = r\omega_r(t) + \omega_{r-1}(t). \quad (15)$$

(12)ни дифференцирлеп, биринчи туура келүүчүлүктү алабыз. Андан кийин

$$A\omega_r(t) = A\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_2 + \ \dots + \eta_r\right) =$$

$$= \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\lambda\eta_1 + \dots + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}(\lambda\eta_2 + \eta_1) + \lambda\eta_r + \eta_{r-1} =$$

$$= \lambda\omega_r(t) + \omega_{r-1}(t).$$

Экинчи туура келүүчүлүк да далилденди.
(13) нү (4)кө коюп,

$$y_r'(t) = \left(\omega_r(t)e^{\lambda t}\right)' = \omega_r'(t)e^{\lambda t} + \lambda\omega_r(t)e^{\lambda t}$$

ээ болобуз.

Мындан, (14), (15) туура келүүчүлүктөрдү эске алып,

$$y_r'(t) = \omega_{r-1}(t)e^{\lambda t} + \lambda\omega_r(t)e^{\lambda t} =$$

$$= \left(\omega_{r-1}(t) + \lambda\omega_r(t)\right)e^{\lambda t} = A\omega_r(t)e^{\lambda t} = Ay_r(t),$$

$$y_r'(t) = Ay_r(t).$$

ээ болобуз. C_2нин орун алаары далилденди.

Эми жалпы чечимди аныктоочу теореманы формулировкалайлы.

Теорема 8. *А матрицасы тиешелүү түрдө $k_1, k_2, \dots, k_m$ эселүүлүктөрү менен $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ өздүк маанилерге ээ болсун, болгондо да $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ жана λ_1 өздүк маанилүү $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k_1}$ серия; λ_2 өздүк маанилүү η_{k_1+1}, $\eta_{k_1+2}, \dots, \eta_{k_1+k_2}$ серия ж.б. Анда ар бир серияга төмөнкүдөй түрдө жазууга мүмкүн болгон (4) теңдеменин чечимдеринин системасы туура келет:*

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 = \eta_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 = \eta_1 e^{\lambda_1 t} + \eta_2, \\
y_{k_1} = \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \dots + \eta_{k_2}\right)e^{\lambda_1 t}, \\
y_{k_1+1} = \eta_{k_1+1}e^{\lambda_2 t}, y_{k_1+2} = \eta_{k_1+1}e^{\lambda_2 t} + \eta_{k_1+2}, \dots, \\
y_{k_1+k_2} = \left(\frac{t^{k_1+k_2-1}}{(k_1+k_2-1)!}\eta_{k_1+1} + \dots + \eta_{k_1+k_2}\right)e^{\lambda_2 t}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .
\end{array}\right\} \quad (16)$$

жана (4) теңдемелер системасынын жалпы чечими

$$y_{об} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

формуласы менен мүнөздөлөт, мында $c_1, c_2, \dots, c_n$ – каалагандай турактуулар.

Бул теореманын далилдөөсү теорема 7 ни далилдөө учурундагыдай жүргүзүлөт.

Жыйынтык чыгаруу менен, теорема 7, 8 (4) системанын жалпы чечимдеринин жашашын ырастайт деп айтууга болот. Эми (3) системанын жекече чечимин табуу ыкмасын көрсөтүшүбүз калды. Сызыктуу теңдемелердин нормалдык системасын изилдөөдө бир тектүү эмес теңдемелердин нормалдуу системасынын жекече чечимин табуу формуласы далилденген.

Жекече чечим турактууларды вариациялоо методу аркылуу табылган. Эгер бул формуланы пайдалансак, анда (3) жекече чечим

$$x_{\text{ч}} = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau\right)$$

формуласы аркылуу жазылат, мында $\Phi(t)$ – (4) теңдеменин фундаменталдык матрицасы; $\Phi^{-1}(t)$ – матрицасы $\Phi(t)$ матрицасына тескери матрица.

$\Phi(t)$ – (4) теңдеменин чечимдеринин фундаменталдык системасынан түзүлгөн фундаменталдык матрица. Теорема 7, 8ге ылайык, бул теоремалар менен аныкталган $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар фундаменталдык системалар деп аталат.

$\Phi(t)$ны пайдаланып, $y_{\text{ж}}$ жалпы чечимин

$$y_{\text{об}} = \Phi(t) \cdot C, \textit{ мында } C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

түрүндө жазууга болот.

Эми бир тектүү эмес системанын жалпы чечимин

$$x_{\text{ж}} = y_{\text{ж}} + x_{\text{жек}} = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau\right)$$

же

$$x_{\text{ж}} = \Phi(t)\left(C_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau\right)$$

деп жаза алабыз, мында $C_1 = C + x_0$.

C_1 дин каалагандай экендигин эске алып, чечимди төмөнкүчө жазууга болот:

$$x_{ж} = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Мисалдар.

1. Бир тектүү системаны карайлы:

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 3y_2 + 4y_2.$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

мүнөздүк теңдемесин түзөбүз.

Ал $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ тамырларына ээ болот.

Теорема 7ге ылайык, жекече чечимдер төмөнкүдөй түрдө жазылат:

$$y_{1ч} = \eta_1 e^{1\cdot t},$$

η_1 – вектор $\lambda_1 = 1$ өздүк маанисине туура келүүчү өздүк вектор.

$\eta_1 = (\eta_{11}, \eta_{12})$ болсун дейли. Анда

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix}$$

же

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Мындан

$$\begin{cases} -2\eta_{11} - 2\eta_{12} = 0, \\ 3\eta_{11} + 3\eta_{12} = 0. \end{cases}$$

системасына ээ болобуз.

Бул система

$$\eta_{11} + \eta_{12} = 0$$

теңдемесине келтирилет.

η_{11}, η_{12} сандарынын бирин каалагандай тандоого болот.

$\eta_{11} = 1$ болсун дейли, анда $\eta_{12} = -1$. Ошентип, $\lambda_1 = 1$ өздүк маанисине $y_{11} = e^t$, $y_{12} = -e^t$чечимдер туура келет.

Аналогиялуу түрдө, $\lambda_2 = 2$ санына туура келген жекече чечимди табабыз:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta_{21} \\ 2\eta_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -3\eta_{21} - 2\eta_{22} = 0, \\ 3\eta_{21} + 2\eta_{22} = 0. \end{cases}$$

$$3\eta_{21} + 2\eta_{22} = 0.$$

$\eta_{21} = 2$ болсун дейли, анда $\eta_{22} = -3$.

Тиешелүү чечимдер

$$y_{21} = 2e^t, \; y_{12} = -3e^{2t}$$

түрүнө ээ.

Эми жалпы чечимди

$$y_1 = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}, \; y_2 = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t}$$

деп жазууга болот.

2. Төмөнкү системанын жалпы чечимин тапкыла:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 + 2e^{-t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + e^{-t}. \end{cases}$$

Алгач, бир тектүү системанын жалпы чечимин табабыз:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2x_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Бул системанын жалпы чечими 1-мисалда табылган

$$y_1 = C_1e^t + 2C_2e^{2t},\ y_2 = -C_1e^t - 3C_2e^{2t}.$$

Каралып жаткан системанын жекече чечимин турактууларды вариациялоо методу аркылуу табабыз.

$x_{1ч} = C_1(t)e^t + 2C_2(t)e^{2t}, x_{2ч} = -C_1(t)e^t - 3C_2(t)e^{2t}$

ээ болобуз. $C_1(t),\ C_2(t)$ ларды

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t}, \\ -C_1'(t)e^t - 3C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t} \end{cases}$$

системадан табабыз. $C_1'(t) = 8e^{-2t}, C_2'(t) = -3e^{-3t}$ ээ болобуз. Анда $C_1(t) = -4e^{-2t},\ C_2(t) = -e^{-3t}$ жана

$$x_{1ч} = -4e^{-t} + 2e^{-t} = -2e^{-t},$$

$$x_{2ч} = 4e^{-t} - 3e^{-t} = e^{-t}.$$

Ошентип

$$x_1 = -2e^{-t} + C_1e^t + 2C_2e^{2t},$$

$$x_2 = e^{-t} - C_1e^t - 3C_2e^{2t}.$$

3. Төмөнкү система берилсин дейли:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Анын жалпы чечимин табабыз.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ же } (2-\lambda)^2 + 1 = 0$$

мүнөздүк теңдемеси $\lambda_1 = 2+i, \lambda_2 = 2-i$ тамырларга ээ.
$-i\eta_1 - \eta_2 = 0$ теңдемесинен аныкталган $\lambda_1 = 2+i$.
η_1, η_2 өздүк маанисине туура келүүчү

$$y_1 = \eta_1 e^{(2+i)\cdot t}, y_2 = \eta_2 e^{(2+i)\cdot t}$$

түрүндөгү чечимди түзөбүз. $\eta_1 = 1$ деп эсептеп, $\eta_2 = -i$ табабыз. Ошентип

$$y_1 = e^{(2+i)\cdot t} = e^{2t}(cost + isint),$$
$$y_2 = -ie^{(2+i)\cdot t} = -e^{t}(sint - icost).$$

Чыныгы жана мнимый бөлүктөрдү ажыратып, эки чыныгы сызыктуу көз-каранды эмес жекече чечимдерди алабыз:

$$y_{11} = e^{2t} \cdot cost, y_{21} = e^{2t} \cdot sint,$$
$$y_{12} = e^{2t} \cdot sint, y_{22} = -e^{2t} \cdot cost.$$

$\lambda_2 = 2-i$ өздүк санды кароо менен, ушундай эле натыйжаны алабыз. Системанын жалпы чечими төмөнкү болуп саналат:

$$y_1 = e^{2t}(C_1 cost + C_2 sint), y_2 = e^{2t}(C_1 sint - C_2 cost).$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН АВТОНОМДУК СИСТЕМАСЫ

$$x_k' = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k),\ k = 1,2,\dots,n \qquad (1)$$

түрүндөгү дифференциалдык теңдемелер n - тартиптеги нормалдык автономдук система деп аталат.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

белгилөөлөрүн киийрип, (1) системаны вектордук формада

$$x' = f(x). \qquad (2)$$

түрүндө жазууга болот.

Дифференциалдык теңдемелердин автономдук системасына t көз-каранды эмес өзгөрүлмө айкын түрдө кирбейт. Бул теңдемелер системасы менен мүнөздөлгөн көз-каранды эмес функциялардын өзгөрүү закону убакыттын өтүүсү менен өзгөрбөйт.

$f_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ функциясына карата n өлчөмдүү мейкиндиктин кандайдыр бир $\mathcal{D}$ ачык көптүгүндө аныкталган болсун дейли. Бул мейкиндиктин элементтерин чекиттер деп атайбыз, чекиттин координаталары болуп $x_1, x_2, \dots, x_n$ өзгөрүлмөлөрү эсептелет. Ошондой эле, биз $\mathcal{D}$ көптүгүндө $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциялары жана биринчи тартиптеги туундулары үзгүлтүксүз болсун дейли.

Мындай божомолдоодон теорема 3кө ылайык, (1) же (2) системанын берилген баштапкы шарттарды канааттандыруучу чечимдери жашайт.

Эми, эгерде (1)нин чечими

$$x_m = \varphi_m(t), m = 1,2, \dots, n$$

болсо, анда

$$x_m = \varphi_m^*(t) = \varphi_m(t + C), m = 1,2, \dots, n \qquad (4)$$

(1) системанын чечими болоорун далилдейли.

$x_m = \varphi_m(t)$ (1) системанын чечими болуп саналгандыктан,

$$\varphi_m'(t) = f_m\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$$

теңдештиги орун алат. Бул теңдештиктерде tны $t + C$ менен алмаштырсак,

$$\varphi_m'(t + C) = f_m\big(\varphi_1(t + C), \dots, \varphi_n(t + C)\big), m = 1,2, \dots, n$$

алабыз.

Татаал функцияны дифференцирлөө эрежесинен

$$\big(\varphi_m^*(t)\big)' = \frac{d\varphi_m^*(t)}{dt} = \frac{d\varphi_m(t+C)}{dt} = \frac{d\varphi_m(t+C)}{d(t+C)} \cdot \frac{d(t+C)}{dt} =$$

$$= \varphi_m'(t + C).$$

келип чыгат.

Ошентип,

$$\left(\varphi_m^*(t)\right)' = \varphi_m'(t+C) = f_m\left(\varphi_1(t+C), \dots, \varphi_n(t+C)\right) =$$
$$= f_m\left(\varphi_1^*(t), \dots, \varphi_n^*(t)\right).$$

Мындан $\varphi_m^*(t)$ же $\varphi_m(t+C)$ (1)нин чечими болуп саналаары орун алат.

Эми (1) системанын чечимдеринин кинематикалык чечмеленишине өтөбүз.

(1) системанын

$$x_m = \varphi_m(t),\ m = 1,2,\dots,n \tag{5}$$

ар бир чечимине (5) теңдемелер аркылуу берилүүчү n -өлчөмдүү мейкиндиктеги чекиттин кыймылын туура келтиребиз, мында $x_1, x_2, \dots, x_n$ – мейкиндиктеги чекиттердин координаталары, ал эми t – убакыт. Кыймыл процессинде бул чекит мейкиндикте кандайдыр бир траекторияны сүрөттөйт.

Эгер (5)нин чечими менен башка

$$x_m = \psi_m(t), m = 1,2,\dots,n \tag{6}$$

чечимди карасак, анда бул чечимдерге туура келүүчү траекториялар мейкиндикте же кесилишет же дал келишет.

ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛ ЖАНА ТУЮК ТРАЕКТОРИЯЛАР

“(1) системанын чечимин сүрөттөөчү траектория өзүн-өзү кесип өтөбү” деген суроо коёлу.

Коюлган суроого жоопту төмөнкүчө формулировкалоого болот: үч сорттогу траектория кездешет:

1) Тең салмактуулук абал;
2) Мезгилдүү траекториялар (циклдер);
3) Өз ара кесилишпөөчү траекториялар.

1) Эгер

$$\varphi_m(t) = a_m, \qquad m = 1,2,\dots,n$$

(1) системанын чечими болсо, анда ал чечим тең салмактуулук абал деп аталат, мында $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\mathcal{D}$ көптүгүндөгү t дан көз-каранды эмес чекит.

Ошентип, эгер $\varphi_m(t)$ тең салмактуулук абалы болсо, анда $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ чекити t нын өзгөрүүсүнөн кыймылга келбейт, өз ордунда турат.

2) Каалагандай t үчүн T оң саны жашап,

$$\varphi_m(t+T) = \varphi_m(t), m = 1,2,\dots,n$$

барабардыгы орун алат, бирок $|\tau_1 - \tau_2| < T$ болгондо, эч болбосо, бир $m = 1,2,\dots,n$ үчүн

$$\varphi_m(\tau_1) \neq \psi_m(\tau_2)$$

барабардыгы орун алат.

Бул учурда

$$x_m = \varphi_m(t), m = 1,2,\dots,n$$

чечим T мезгили менен мезгилдүү деп аталат, ал эми чечимди сүрөттөөчү траектория туюк траектория же цикл деп аталат.

Чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремадан (1) системанын ар бир $\mathcal{D}$ областын аркылуу системанын чечимин сүрөттөөчү траектория өтө тургандыгы келип чыгат.

Ошентип, $\mathcal{D}$ областы толук бойдон өз ара кесилишпеген траекториялар менен толтурулат. Бардык траекториялардын арасында тең салмактуулук абал же цикл болуп саналган өз ара кесилишпөөчү өзгөчө траекториялар каралат.

Биз (1) системанын кинематикалык интерпретациясын карадык. (1) системанын өзү да геометриялык интерпретацияга жол берет.

ФАЗАЛЫК МЕЙКИНДИК

Эми (1) системанын геометриялык интерпретациясын аныктайлы. $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ – $\mathcal{D}$ көптүгүнөн алынган каалаган чекит болсун, анда бул чекитке n сандардын удаалаштыгы туура келет:

$$f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}),\ \dots, f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}).$$

Бул сандарды n-өлчөмдүү мейкиндикте жүргүзүлгөн жана $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ чекитинен чыккан

$$f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) = f(x_0)$$

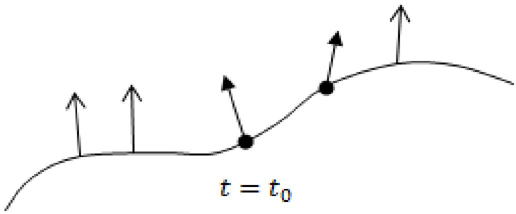
векторунун компоненти катары кароого болот.

Ошентип, автономдук системага $\mathcal{D}$ ачык көптүгүндө берилген вектордук талаа – геометриялык түспөлү туура келтирилет. $\mathcal{D}$ көптүгүнүн ар бир $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ чекитинде ошол чекиттен чыгуучу $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ вектор аныкталган.

(1) системанын өзүнүн геометриялык интерпретациясы менен (1) системанын чечимдеринин геометриялык интерпретациясынын ортосундагы байланышты орнотолу. Ал байланыш төмөнкү менен түшүндүрүлөт: $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ чекитинде теңдемелер системасынын геометриялык интерпретациясына ылайык, ошол чекиттен чыккан $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ вектор тиешелеш коюлат. Андан кийин, чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремага ылайык төмөнкү баштапкы шарттарды канааттандыруучу (1) системанын $x_m = \varphi_m(t)$ чечими жашайт:

$$\varphi_m(t_0) = x_{0m},\ m = 1,2, \dots, n.$$

Кинематикалык интерпретациянын негизинде $x_m = \varphi_m(t)$ чечимине мейкиндикте траекторияны сүрөттөөчү чекиттин кыймылы (ал $\mathcal{D}$ болушу мүмкүн), болгондо да, $t = t_0$ убакыт моментинде кыймылга келген чекит мейкиндикте $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ абалы аркылуу өтөт.



(n=3)

Ошентип, $x_m = \varphi_m(t)$ чечимин мүнөздөөчү чекиттин $(x_1', \dots, x_n')$ вектордук ылдамдыгы $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ абалы аркылуу өтүү моментинде $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ вектору менен дал келет. Бул дал келүү

$$x_m = x_{0m}, m = 1,2, \dots, n;\ t = t_0$$

болгон учурда (1) теңдемелер системасы менен туюнтулат.

(1) автономдук системанын чечимдери траектория түрүндө жана (1) автономдук системанын өзү вектордук талаа түрүндө интерпретацияланган n өлчөмдүү мейкиндик (1) системанын фазалык мейкиндиги деп аталат.

Траекториялар – фазалык траектория деп, $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ векторлор – фазалык ылдамдыктар деп аталышат. Фазалык мейкиндикте t убактысы параметр катары каралат.

ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛ ЖАНА ФАЗАЛЫК ЫЛДАМДЫК

Эми фазалык ылдамдыктар көз-карашында тең салмактуулук абалды карайлы.

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чекити $\mathcal{D}$ көптүгүнөн алынсын дейли.

С3. Эгерде $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чекитиндеги $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ фазалык ылдамдык нөлгө барабар болсо, б.а. $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, анда бул шарт $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чекити (1) системанын тең салмактуулук абалы болушу үчүн зарыл жана жетиштүү болот, б.а. $\varphi_m(t) \equiv a_m$ болгондой системанын $x_m = \varphi_m(t)$ чечими жашайт. Бул сүйлөмдөн төмөндөгү келип чыгат: (1) системанын бардык тең салмактуулук абалдарын табуу үчүн

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, m = 1,2, \dots, n$$

теңдемелер системасын чыгаруу керек.

Бул система чектүү теңдемелер (ага туундулар кирбейт) системасын туюнтат.

С3 ырастоосун далилдейли. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чекити (1) системанын тең салмактуулук абалы болсун дейли, б.а.

$$\varphi_m(t) \equiv a_m, \qquad m = 1,2, \dots, n$$

болгондой (1) системанын $x_m = \varphi_m(t)$ чечими жашайт. Ал чечимди (1) системага коюп,

$$\varphi'_m(t) = (a_m)' = 0 = f_m(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

алабыз. Ошентип, фазалык ылдамдыктын $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ вектору $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чекитинде нөлгө барабар.

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

болсун дейли. Анда (1)ден $\varphi'_m(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$

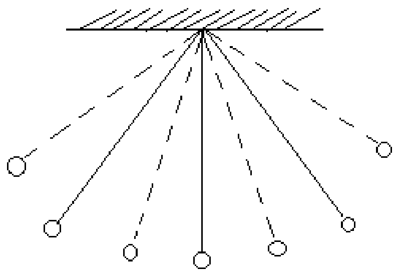
ээ болобуз. Мындан $\varphi_m(t) \equiv a_m$ экендиги келип чыгат.

ТУРУКТУУЛУК

Жетишээрлик көпчүлүк процесстер кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы менен мүнөздөлүшөт. Мындай системалар дайыма чечимдердин чексиз көп чыгарылыштарына ээ болушат, жана бир анык чечимди берүү үчүн анын баштапкы маанилерин көрсөтүү керек болот. Практикада колдонулган түзүлүштөр көбүнчө анык бир режимде иштешет, жана алардын иштешинде, биринчи көз-караашта теңдемелер системасынын түрдүү чечимдерине туура келүүчү иштөө режимдеринин чексиз көптүгүн аныктоо мүмкүн эмес. Ал түзүлүштү ишке киргизгенде, чечимдердин баштапкы маанилери кандайдыр бир анык жол менен тандалгандыгынан же прибордун иштөө узактыгында баштапкы маанилер өзүнүн таасирин жоготушу менен түшүндүрүлөт, жана түзүлүш стационардык режимде өзүнүн ишин өзү стабилдештирет.

Мисал келтирели. Дубал саатынын иштешин карап көрөлү. Мындай саат маятниктин абдан өзгөчө кыймылы менен иштейт, бирок саатты иштеткенде, маятник вертикалдык абалдан өтө же бир аз четтетилиши мүмкүн. Эгер маятник жетиштүү деңгээлде четтеттилбесе, ал бир аздан кийин токтоп калат.

Эгер четтетүү жетишээрлик чоң болсо, анда кандайдыр бир кыска убакыттан кийин термелүүлөрдүн амплитудасы стабилдештирилет, жана сааттар ушундай термелүүлөрдүн амплитудасы менен анча көп эмес жүрөт. Ошентип, сааттын ишин мүнөздөөчү теңдемелердин системасында эки стационардык чечим болот: жүрүш жок болгон учурдагы тең салмактуулук абал жана сааттын нормалдуу жүрүшүнө туура келген мезгилдүү чечим. Башка каалагандай чечим мындай стационардык чечимдердин бирине өтө бат жакындашат жана кандайдыр бир убакыттын өтүшү менен андан эч айырмаланбай калат, ал эми мындай чечимдер чексиз көп кездешет.



Маятниктин четтөөсүнө анык шарттарда маятниктин термелүүсүн мүнөздөөчү кандайдыр бир чечимди аныктоочу анык баштапкы маанилер туура келет. Маятниктин чоң эмес четтөөлөрүндө аныкталуучу чечимдердин жыйындысын Ω_0 аркылуу белгилейбиз, ал эми жетишээрлик чоң четтөөлөр менен аныкталуучу чечимдердин жыйындысын Ω_p аркылуу белгилейбиз.

Эгер Ω_0 же Ω_p дан каалагандай стационардык эмес чечимдерди алсак, анда кандайдыр бир убакыттан кийин ал чечимдер стационардык чечимдердин бирине жакындайт. Мындай эки стационардык чечимдердин ар бири кандайдыр бир мааниде туруктуу болуп саналат.

Чечимдердин туруктуулугунун анча так эмес аныктамасынын формулировкаланышы мына ушундай.

Келтирилген мисал сааттын иштешин мүнөздөгөн теңдемелер системасынын фазалык мейкиндиги эки тартылуу областына ажырай тургандыгын көрсөтөт.

Эгер областтардын биринен баштапкы маанини алсак, анда (Ω_0 дон алынган) чечим тең салмактуулук абалга умтулат; эгер башка облаттан баштапкы маанилерди алсак, анда (Ω_0 дон алынган) чечимдер мезгилдүү чечимге умтулушат.

ЛЯПУНОВ БОЮНЧА ТУРУКТУУЛУКТУН АНЫКТАМАСЫ

$$x'_m = f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (1)$$

теңдемелер системасын карайлы.

(1)системаны вектордук формада төмөнкүчө түрдө жазабыз:

$$x' = f(t, x) \qquad (2)$$

(1), (2) системаны $t_0 \leq t < +\infty$ чексиз убакыт интервалында аныкталган деп эсептейли.

$t = t_0$, $x_0 = \varphi(t_0)$ баштапкы шарттарын канааттандырган жана бардык $t > t_0$ үчүн аныкталган (2) системанын чечими $x = \varphi(t)$ болсун дейли.

$t = t_0$, $\tilde{x}_0 = \tilde{\varphi}(t_0)$ баштапкы шарттарын канааттандыруучу (2) системанын каалагандай чечими $x = \tilde{\varphi}(t)$ болсун. $t = t_0$, $\tilde{x}_0 = \varphi(t_0)$ баштапкы шарттары менен берилген жана каалагандай $t > t_0$ үчүн аныкталган $x = \tilde{\varphi}(t)$ чечимин $\Omega\ (t_0, \tilde{x}_0)$ аркылуу белгилейбиз.

Аныктама 1. Эгер каалагандай ε оң саны үчүн, $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$ болгондо, бардык $t > t_0$ үчүн $|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \varepsilon$ боло тургандай δ оң саны табылса, анда $x = \varphi(t)$ чечими Ляпунов боюнча туруктуу деп аталат.

ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛДЫН ТУРУКТУУЛУГУ

$$x'_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (1)$$

нормалдуу автономдук система жана

$$x' = f(x) \qquad (2)$$

анын вектордук жазылышы.

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (3)$$

функцияларына карата $x_1, x_2, \dots, x_n$ өзгөрүлмөлөрүнүн $\mathcal{D}$ кандайдыр бир ачык көптүгүндө биринчи тартиптеги үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун жана аныкталган болсун деп божомолдойлу. Бул шарт мындан аркы берилген баштапкы шарттар менен берилген чечимдердин жашашына жана жалгыздыгына кепилдик берет.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $(a_m - const)$ (2) теңдеменин тең салмактуулук абалы жана

$$t = t_0, x_0 = \varphi(t_0) \qquad (4)$$

баштапкы шарты менен берилген жана каалагандай $t > t_0$ үчүн аныкталган теңдеменин $x = \varphi(t)$ каалагандай чечими болсун дейли.

Мындай чечимдердин жыйындысын $\Omega(t_0, x_0)$ аркылуу белгилейбиз.

Аныктама 2. Эгер $\varphi(t) \epsilon\, \Omega(t_0, x_0)$ жана $|x_0 - a| < \delta$ болгондо, бардык $t > t_0$ үчүн $|\varphi(t) - a| < \varepsilon$ болгондой δ оң саны жашаса, анда a тең салмактуулук абал, ал эми (2) теңдеме Ляпунов боюнча туруктуу деп аталат.

Аныктама *3. Эгер:*

1. (2) теңдеменин a тең салмактуулук абалы Ляпунов боюнча туруктуу деп аталат.

2. $|x_0 - a| < \delta_1$ үчүн жетишээрлик кичине δ_1 оң сан жашаса, анда

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t) - a| = 0,$$

ээ болобуз, анда (2) теңдеменин a тең салмактуулук абалы асимптотикалык туруктуу деп аталат. .

Биринчи тартиптеги теңдеменин мисалы

$$x' = f(x) \tag{5}$$

теңдемесин карайлы.

$f(0) = 0$, б.а. $x = 0$ тең салмактуулук абалы болсун дейли. Бул чечимдин туруктуулугу x тин нөлгө жакын маанилериндеги $f(x)$ тин белгисинен көз-каранды.

x тин нөл аркылуу өтүп өсүүсүнөн, функция белгисин "+"тан "−"ка өзгөртөт деп божомолдойлу.

$x = \varphi(t)$ бардык $t > t_0$ үчүн аныкталган $x_0 = \varphi(t_0)$ баштапкы шарты менен берилген (5) теңдеменин чечими болсун дейли. (5)ке $x = \varphi(t)$ коюп,

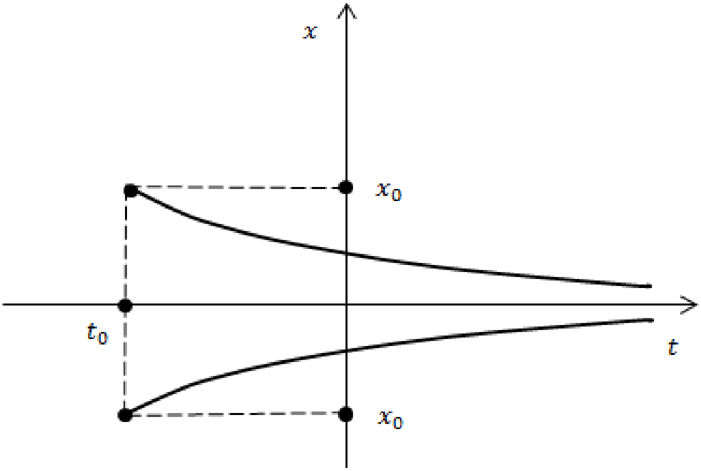
$$\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right) \tag{6}$$

теңдештигине ээ болобуз.

Эгер (6) да бардык $t > t_0$: $\varphi(t) < 0$ болсо, анда $f\left(\varphi(t)\right) > 0$.

Эгер бардык $t > t_0$: $\varphi(t) > 0$ болсо, анда $f\big(\varphi(t)\big) < 0$ жана $x = \varphi(t)$ чечими кемийт.

Эки учурда тең x_0 баштапкы шарты нөлгө жакын болсо гана, $x = \varphi(t)$ чечими $x = 0$ чечимине жетишээрлик жакын болот.



ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ СИСТЕМАНЫН ТЕҢ САЛМАКТУУ АБАЛЫНЫН ТУРУКТУУЛУГУ

Эми турактуу коэффициенттүү сызыктуу система үчүн тең салмактуу абалдын туруктуулугунун жетиштүү шартын формулировкалайлы.

$$x' = Ax, \tag{7}$$

системасы берилсин дейли, мында $A = (a_{mk})$ $(m, k = 1, \dots, n)$ – n-тартиптеги турактуу матрица, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ жана $x = \varphi(t)$

$$t = t_0, \ \varphi(t_0) = x_0.$$

баштапкы шарты менен берилген (7) системанын чечими.

Туруктуулуктун жетиштүү шарты: Эгер A матрицасынын бардык өздүк маанилери терс чыныгы бөлүктөргө ээ болсо, анда

$$|\varphi(t)| \leq r|x_0|e^{-\alpha t}, \ t \geq t_0 \tag{8}$$

барабарсыздыгы аткарыла тургандай, α жана r оң сандары жашайт.

(8) барабарсыздыктан (7) теңдеменин $x = 0$ тең салмактуулук абалы түздөн-түз Ляпунов боюнча туруктуу жана асимптотикалык туруктуу экендиги келип чыгат.

Формулировкаланган сүйлөмдөн A матрицасынын бардык өздүк маанилеринин чыныгы бөлүктөрүнүн терс болушу $x = 0$ тең салмактуулук абалдын туруктуулуктун жетиштүү шарты жана асимптотикалык туруктуулугу келип чыгат.

$e_k -$ k номериндеги бирдик координаталык вектор болсун дейли, б. а.

$$e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

мында 1 саны k – орунда турат. $\varphi_k(t)$

$$\varphi_k(t_0) = e_k,\ k = 1, \dots, n.$$

баштапкы мааниси менен берилген (7) теңдеменин чечими болсун дейли.

Анда

$$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$$

баштапкы мааниси менен берилген (7) теңдеменин $x = \varphi(t)$ чечимин

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_{0k}\ \varphi_k(t)$$

түрүндө жаза алабыз.

БИРИНЧИ ЖАКЫНДАШУУ БОЮНЧА ТУРУКТУУЛУК

$$x_m' = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \ m = 1, \dots, n, \qquad (1)$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ өзгөрмөлөрдүн $\mathcal{D}$ көптүгүндө аныкталган (1) система берилсин жана $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – бул системанын тең салмактуулук абалы, $a \in \mathcal{D}$. Андан кийин (1)дин оң жагы чечимдин жалгыздыгы жана жашашы жөнүндө теореманын шарттарын канааттандырат деп болжолдойлу.

$$x_m = a_m + \xi_m, \qquad m = 1, \dots, n$$

деп алалы, мында ξ_m – жаңы белгисиз функциялар.

x_m ди (1) ге коюп жана оң жагын ξ_m өзгөрмөлөрү боюнча Тейлордун катарына ажыратып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\xi_m' = f_m(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_k} \cdot \xi_k + R_m, m = 1, \dots, n, \ (1)^*$$

мында R_m – ξ_m белгисизине карата экинчи тартиптеги кичинеликтеги мүчө.

a – (1) системанын тең салмактуулук абалы болгондуктан,

$$f_m(a) = 0.$$

$$a_{mk} = \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n}$$

деп алып, $(1)^*$ системаны төмөнкүчө түрдө жазууга болот:

$$\xi_m' = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot \xi_k + R_m, \ m = 1, \dots, n \ (1)^{**}$$

Төмөнкү теорема орун алат:

Теорема *(Ляпуновдун теоремасы). Эгер* $A = (a_{mk})$ *матрицасынын бардык өздүк маанилери терс чыныгы бөлүктөргө ээ болсо, анда (1) системасынын* a *тең салмактуулук абалы асимптотикалык туруктуу; мындан* *сырткары* $|x_0 - a| < \delta$ *болгондо жетишээрлик кичине* δ *оң саны жашап*

$$|\varphi(t) - a| \le r|x_0 - a|e^{-\propto(t-t_0)},$$

барабарсыздыгы орун алат, мында $\varphi(t_0) = x_0$, r *жана* α – x_0 *дон көз-каранды болбогон оң сандар.*

Жалпылыкты бузбастан, $a = 0$ деп эсептөөгө болот.

Бул теореманын далилдөөсү Ляпуновдун функциясынын жардамында жүргүзүлөт. Айрым оң аныкталган квадраттык формалар Ляпуновдун функциялары деп аталат.

Квадраттык форманы аныктайлы.

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

n -өлчөмдүү мейкиндикте өзгөрмө вектор болсун дейли.

$$W(x) = \sum_{m,k=1}^{n} w_{mk} \cdot x_m \cdot x_k,$$

формуласы менен аныкталган $W(x)$ функциясы x векторунан квадраттык форма деп аталат.

Эгер $x \ne 0$ болгондо

$$W(x) > 0,$$

болсо, анда квадраттык форма оң аныкталган деп аталат.

Каалагандай квадраттык форма үчүн

$$\mu|x|^2 \le W(x) \le \nu|x|^2, \tag{9}$$

барабарсыздыгы орун алат, мында μ, ν – айрым оң сандар, x – каалагандай вектор. Эми (7) ((1)** системасына туура келүүчү) түрдөгү сызыктуу бир тектүү системаны кароо менен, $W(x)$ оң аныкталган квадраттык форманы түзүүгө болот.

t_0, x_0 баштапкы маанилери менен берилген (7) теңдеменин чечимин $\varphi(t)$ аркылуу белгилейбиз.

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_{0k} \cdot \varphi_k(t) \tag{10}$$

ээ болобуз. Эми

$$W(x_0) = \int_{t_0}^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau. \tag{11}$$

болсун дейли. (10) ду эске алып,

$$W(x_0) = \sum_{m,k=1}^{n} x_{0m} \cdot x_{0k} \int_{t_0}^{\infty} \big(\varphi_k(\tau), \varphi_m(\tau)\big) d\tau. \tag{12}$$

алабыз. (8) барабарсыздыгын ар бир $\varphi_k(t)$ функциясы канааттандыргандыктан, (12) нин оң жагындагы ар бир өздүк эмес интеграл жыйналат. Натыйжада, x_0 векторуна карата $W(x_0)$ квадраттык форма болот, ошону менен бирге $x_0 \neq 0$ болгондо (11) ге ылайык оң аныкталган.

Эми (7) системага ылайык, $W(x_0)$ функциясынын $W'_{(7)}(x_0)$ туундусун эсептейбиз. Алдын-ала

$$\varphi\big(\tau, \varphi(t)\big) = \varphi(\tau + t).$$

экендигин белгилей кетсек. Анда

$$W\big(\varphi(t)\big) = \int_0^{\infty} \left|\varphi\big(\tau, \varphi(t)\big)\right|^2 d\tau = \int_0^{\infty} |\varphi(\tau + t)|^2 d\tau =$$

$$= \int_t^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau.$$

Ошентип,

$$W'_{(7)}(x_0) = \frac{d}{dt} \mathrm{W}\big(\varphi(t)\big)\Big|_{t = t_0} = \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \Big|_{t = t_0} =$$

$$= |\varphi(t)|^2 \Big|_{t = t_0} = -|x_0|^2$$

Демек, $W'_{(7)}(x_0) = -|x_0|^2$.

Эгер (9) барабарсыздыкты эске алсак, анда

$$|x_0|^2 \leq -\frac{1}{\nu} W(x_0).$$

Натыйжада

$$W'_{(7)}(x_0) \leq \frac{1}{\nu} W(x_0). \tag{13}$$

$$\xi'_m = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}\xi_k, \ m = 1, \dots, n \tag{14}$$

сызыктуу системасы үчүн $(1)^{**}$ системаны сызыкташтыруудан алынган, башкача айтканда R_m калдык мүчөлөрдү таштоодон алынган $W(x)$ Ляпунов функциясы болсун дейли. $(1)^{**}$ системасына ылайык, $W(x)$ функциясынын $W'_{(1)**}(x)$ туундусун эсептейли.

$$W'_{(1)**}(x) = \sum_{m,k=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot a_{mk} \cdot x_k + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m =$$
$$= W_{(14)}(x) + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m$$

ээ болобуз.

$$W(x) \leq b \tag{15}$$

болгондо x вектору $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ көптүгүнө таандык болгондой, b оң санын тандайлы.

$\frac{\partial^2 f_m(\theta x)}{\partial x_m \partial x_k}$ экинчи тартиптеги туундулар үзгүлтүксүз функциялар болгондуктан, (15) эллипсоидде чектелген жана ошол себептен бул эллипсоидде

$$|R_m| \leq n_0 |x|^2 \leq \frac{n_0}{\mu} W(x),$$

мында n_0 – кандайдыр бир турактуу.

$\frac{\partial W(x)}{\partial x_m}$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ге карата сызыктуу форма болгондуктан,

$$\left|\frac{\partial W(x)}{\partial x_m}\right| \leq l\sqrt{W(x)},$$

мында l – айрым турактуу. Ошентип, $W(x) \leq b$ болгондо

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m \leq qW(x)^{\frac{3}{2}}$$

ээ боло тургандай, q оң саны жашайт.

$$c \leq b, \qquad q\sqrt{c} \leq \frac{\beta}{2}$$

болгондой, c оң санын тандайбыз. Анда

$$W(x) \leq \text{c}. \tag{16}$$

Болгондо $W'_{(1)**}(x) \leq -\frac{\beta}{2}W(x)$ ээ болобуз.

$\alpha = \frac{\beta}{4}$ деп белгилеп, x үчүн (16) барабарсыздык орун алган $W'_{(4)}(x) \leq -2\alpha W(x)$ барабарсыздыкты алабыз.

x_0 – (16) эллипсоиддин ички чекити болсун дейли, б.а.

$$W(x_0) \leq c. \tag{17}$$

t_0, x_0 баштапкы шарттары менен берилген (4) системанын чечимин $\varphi(t, x_0)$ аркылуу белгилейли жана

$w(t) = W\big(\varphi(t, x_0)\big)$ болсун дейли.

$w(t)$ функциясы $t \geq t_0$ бардык маанилер үчүн аныкталган жана ал үчүн

$$w'(t) \leq -2\alpha w(t) \tag{18}$$

шартын

$$w(t) \leq c. \tag{19}$$

барабарсыздыгы аткарылганга чейин канааттандырат.

Эгер $x_0 \neq 0$ болсо, анда $w(t) > 0$ болот, жана биз (18) барабарсыздыкка негизделген төмөнкү эсептөөлөрдү жүргүзөбүз:

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq -2\alpha;$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{w'(\tau)}{w(\tau)} d\tau \leq -2\,\alpha(t - t_0);$$

$$lnw(t) - lnw(t_0) \leq -2\alpha(t - t_0).$$

Акыркы барабарсыздык төмөнкүнү берет:

$$W\big(\varphi(t, x_0)\big) \leq W(x_0)e^{-2\alpha(t-t_0)}.$$

(9) барабарсыздыкты пайдалануу менен

$$|\varphi(t, x_0)|^2 \leq \frac{\nu}{\mu}|x_0|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0. \quad (20)$$

алабыз. Эгер x_0 үчүн (16) барабарсыздык аткарылса, (19) барабарсыздык орун алат. (20)дан квадраттык тамыр чыгаруу менен

$$|\varphi(t, x_0)| \leq \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}|x_0|e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

ээ болобуз. Теорема далилденди.

(1) теңдеменин a тең салмактуулук абалы толук бойдон туруксуз деп аталат, эгерде каалагандай σ оң саны жашап, каалагандай $\varphi(t, x_0)$ чечими $|x_0 - a| < \sigma$ шарынын $x_0 \neq a$ чекитинен баштап, ошол шарды сөзсүз таштап кетип жана ага кайра кайтып келбесе.

Эгер $A = (a_{mk})$ матрицасынын бардык өздүк маанилери оң чыныгы бөлүктөргө ээ болсо, анда (1) теңдеменин a тең салмактуулук абалы толук бойдон туруксуз болот.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И
ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ
КОМПЛЕКС «ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Б.ОСМОНОВА»

К.С.АЛЫБАЕВ, М.Н.НУРМАТОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Манас
2026

УДК 517.9
ББК 22.161.6
А59

Рассмотрено на заседании Методического совета ЖАГУ имени Б. Осмонова от 18 декабря 2025 года и рекомендовано к использованию и печати.

Рецензенты:
Сопуев А.С. – доктор физ.-мат. наук, профессор
Джураев А.М. – доктор физ.-мат. наук, и.о.проф.

Алыбаев К.С., Нурматова М.Н.
А Дифференциальные уравнения. Учебное пособие.
– Манас: -2026. – 116 с.
ISBN 978-9967-09-513-7

Дифференциальные уравнения используются для изучения явлений, встречающихся в природе, а точнее, для исследования изменения состояния объекта, их скорости и ускорения. В высших учебных заведениях дифференциальные уравнения преподаются как специальный курса при подготовке профессиональных специалистов по направлению физико-математического образования.

Данное учебное издание предназначено для студентов и преподавателей данного направления.

УДК 517.9
ISBN 978-9967-09-513-7 ББК 22.161.6

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. *Уравнения, содержащие независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные называется дифференциальными*.

Вхождение независимой переменной и неизвестной функции в уравнение не обязательно, а производных обязательно.

Наивысший порядок производной называется порядком уравнения.

Определение. Если неизвестная функция одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным; многих переменных, то уравнением в частных производных.

Примеры: 1.1. $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$,

1.2. $\left(x'(t)\right)^2 - t \cdot x(t) = 0$,

1.3. $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$,

1.4. $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t)$,

1.5. $x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 1$.

В примерах 1.1-1.5 функция $x(t)$ – неизвестная; t - независимая переменная.

2.1. $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + u(x, y) = f(x, y)$

2.2. $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$

2.3. $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = a(x, y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$

2.4. $\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]^2 - \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]^2 + u(x, y) = 0$

2.5. $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial y^3} = 0$.

В примерах 2.1.-2.5. функция $u(x,y)$ - неизвестная, а x,y - независимые переменные. Уравнения 1.1.-1.5. – обыкновенные, а 2.1.-2.5. – в частных производных.

Уравнения 1.2., 1.4., 2.1., 2.4. – первого; 1.3., 1.5., 2.2., 2.3. – второго; 2.5. – третьего порядков.

Определение. *Решением дифференциального уравнения называют любую функцию, определенную на некотором интервале и имеющую соответствующие порядки производных, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.*

Примеры:

1. Функция $x(t) = sin\omega t$ является решением дифференциального уравнения

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \omega - const.$$

Имеем:

$$x'(t) = \omega \cdot cos\omega t, x''(t) = -\omega^2 \cdot sin\omega t.$$

Подставляя найденные значения в уравнение, получаем тождество

$$-\omega^2 \cdot sin\omega t + \omega^2 \cdot sin\omega t \equiv 0.$$

Точно также проверяется, что функции

$$x(t) = cos\omega t, x(t) = C_1 sinx(t) + C_2 cos\omega t$$

(C_1, C_2 – произвольные постоянные) являются решениями уравнения

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

2. Функция $u(x,y) = x^2 - y^2$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$.

Подставляя найденные значения производных в уравнение, получим тождество

$$2 + (-2) \equiv 0.$$

Функция $u(x, y) = Cxy$ (C–произвольная постоянная) также является решением заданного уравнения.

В данном случае мы не будем ставить задачи нахождения решений, о возможных количествах решений. По ходу изложения будут даны ответы на эти и другие вопросы.

Далее мы в основном будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы.

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Уравнение n-порядка в общем виде можно записать так

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0. \tag{1}$$

При $n = 1$ имеем уравнение первого порядка

$$F\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0. \tag{2}$$

Пусть задано уравнение (2).

Функция F является функцией от трех переменных t, x, x'. В некоторых случаях соотношение (2) определяет переменную x' как однозначную неявную функцию от переменных t, x.

В этом случае уравнение (2) равносильно уравнению вида

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение (3) называется разрешенным относительно производной.

Уравнение (3) более доступно для изучения, чем общее дифференциальное уравнение (2).

При изучении (3) мы не будем считать, что уравнение (2) как разрешенное относительно производной $x'(t)$, а будем исходить из функции $f(t,x)$ как заданную функцию двух переменных t, x.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Пусть задано уравнение (3). Введем в рассмотрение координатную плоскость $R^2 = \{(t,x)\}$ (рис.1).

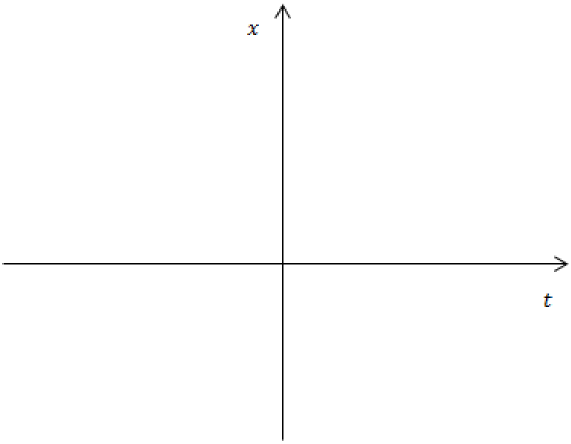


Рисунок. 1.

Функция $f(t,x)$, определяющая дифференциальное уравнение (3), может быть определена не для всех значений своих аргументов t и x, говоря геометрическим языком, не во всех точках плоскости R^2, а лишь в точках некоторого множества $\mathcal{D}$ плоскости R^2. Далее будем предполагать, что $\mathcal{D}$ открытое множество. Это значит, что наряду с каждой точкой $A \epsilon \mathcal{D}$ входит в $\mathcal{D}$ и некоторая окрестность (круг с центром в A) точки A.

Пусть $f(t,x)$ непрерывна в $\mathcal{D}$ и $x=\varphi(t)$ решение уравнения (3) определенная для $r_1 < t < r_2$.

Подставляя $x=\varphi(t)$ в (3) имеем тождество

$$\varphi'(t) \equiv f(t,\varphi(t)) \tag{4}$$

График функции $\varphi(t)$ полностью проходит в открытом множестве $\mathcal{D}$. Если вспомнить геометрический смысл производной, то график в каждой точке имеет касательную с угловым коэффициентом равным $f(t,\varphi(t))$ (рис. 2).

График функции $x=\varphi(t)$ называется интегральной кривой дифференциального уравнения (3).

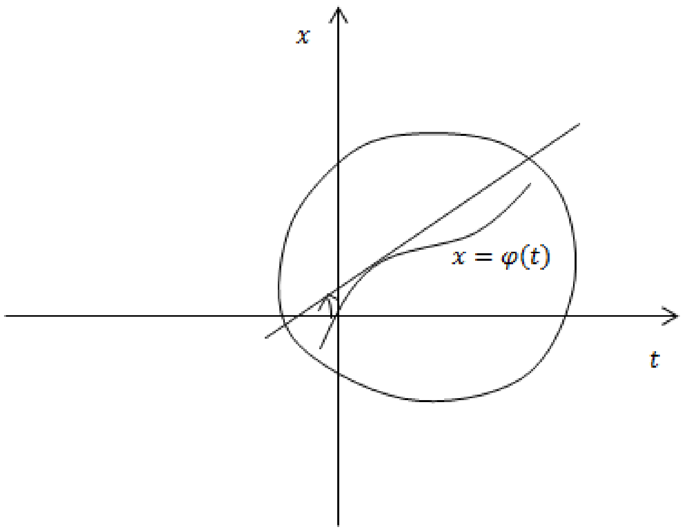


Рисунок. 2.

Поскольку функция $f(t,x)$ непрерывна в $\mathcal{D}$, то через любую точку множества $\mathcal{D}$ можно провести прямую с угловым коэффициентом равным $f(t,x)$ (рис. 3).

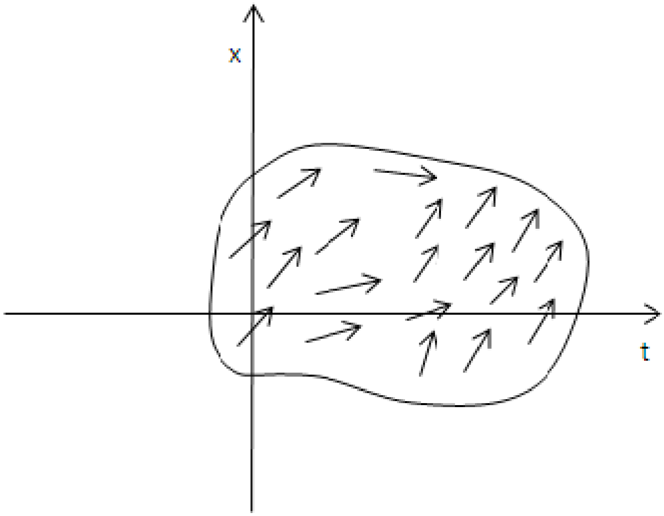


Рисунок. 3

Таким образом, мы получили поле направлений соответствующее уравнению (3).

Связь между геометрической интерпретацией уравнения (3) и геометрической интерпретацией его решений заключается в том, что любая интегральная кривая $x = \varphi(t)$ в каждой своей точке $(t, \varphi(t))$ касается прямой с угловым коэффициентом $f(t, \varphi(t))$.

Изучая поле направлений, определяемое заданным дифференциальным уравнением, мы получаем некоторое представление об интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые.

При изучении поля направлений особый интерес представляют линии, во всех точках которых направление поля одно и то же. Такие линии называются изоклинами.

Примеры:

1. Задано уравнение $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$. Надо исследовать поле направлений. Правая часть уравнения определена для $t \neq 0$.

Пусть $\frac{x}{t} = k$ – постоянная. Имеем $x = kt$. Для различных значений k имеем поле направлений (рис.4).

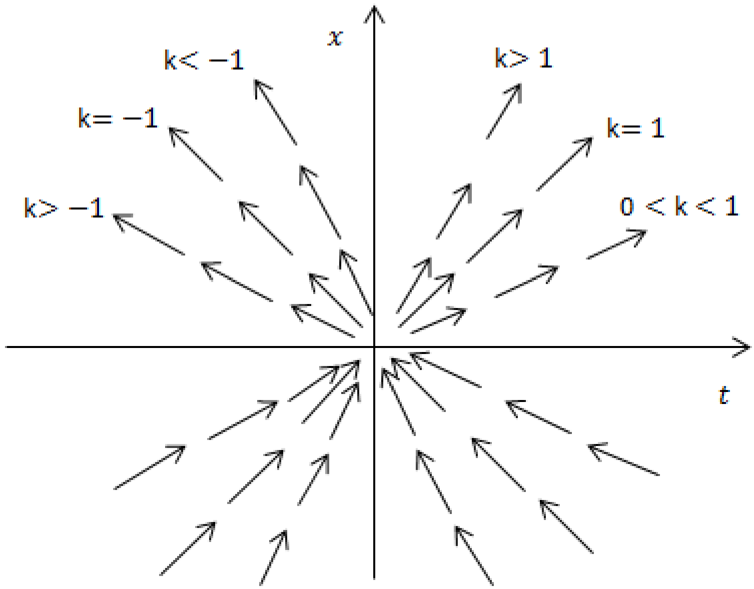


Рисунок. 4

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}.$$

Возьмем $-\frac{t}{x} = k_1 - const$. Отсюда $x = -\frac{1}{k_1} t$.

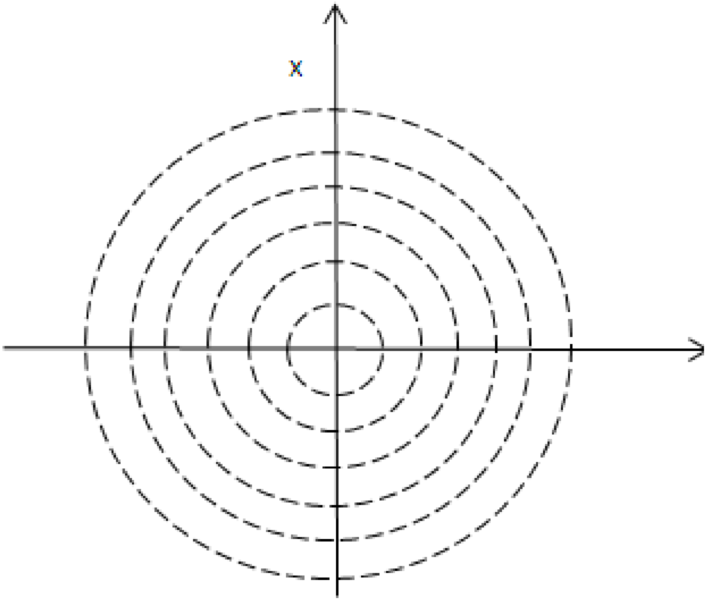


Рисунок. 5

Сравним k (из предыдущего примера) и k_1.

$$k \cdot k_1 = -1,$$

следовательно, касательные определяемые k *и* k_1 взаимно перпендикулярны. Поле направлений уравнения $x' = -\frac{t}{x}$ изображена на рис. 5.

Изображение поле направлений дает основание, что решением дифференциального уравнения $x' = \frac{x}{t}$ будет функция $x = kt$. Действительно $x' = k$, тогда $k = \frac{kt}{t} = k$.

Решением дифференциального уравнения $x' = -\frac{t}{x}$ будет функция $x^2 + t^2 = c^2$ ($c \neq 0$ и произвольная постоянная).

Проверка: $x^2 = c^2 - t^2$, отсюда $2xx' = -2t$, $x' = -\frac{t}{x}$.

ЗАДАЧА КОШИ

Во многих вопросах теоретического и прикладного характера требуется среди всех решений дифференциального уравнения (3) найти решение

$$x = \varphi(t) \tag{4}$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi(t_0) = x_0 \; при \; t = t_0, \tag{5}$$

где t_0 *и* x_0 заданные числа, причем $(t_0, x_0) \epsilon \mathcal{D}$.

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через точку (t_0, x_0) области $\mathcal{D}$ (рис. 6).

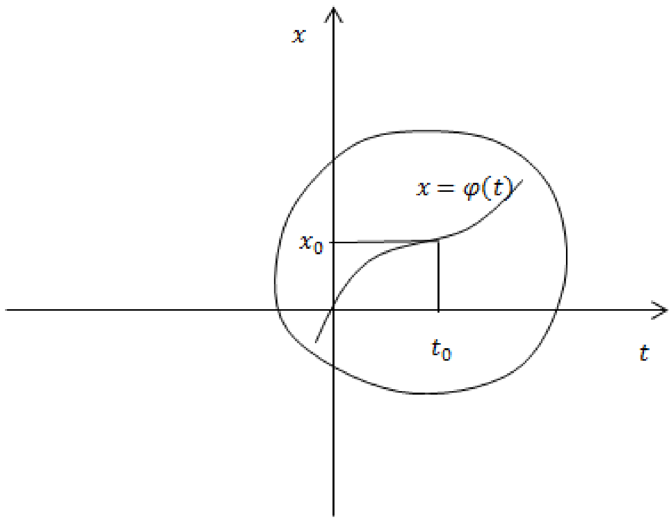


Рисунок. 6

Условие (5) называется начальным условием решения (4), а числа t_0, x_0 – начальными значениями.

Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию (5) называется задачей Коши.

Примеры:

1. Пусть задано уравнение

$$x'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

Требуется найти решение $x(t)$ удовлетворяющее условию $x(0) = 1$.

Нетрудно проверить, что функция

$$x(t) = arctgt + C$$

является решением данного уравнения, C – произвольная постоянная.

Полагая, $t = 0$ находим,

$$x(0) = arctg0 + C = 1 \text{ или } C = 1.$$

Решение, удовлетворяющее заданному начальному условию есть

$$x(t) = arctgt + 1$$

Отметим, что функция $x(t) = arctgt$ также является решением. Это решение не удовлетворяет заданному начальному условию, т.е.

$$x(0) = arctg0 = 0.$$

Рассматриваемый пример показывает, наличие произвольной постоянной в решении существенна.

2. Решением уравнения

$$x'(t) = 2t,$$

удовлетворяющим, начальному условию

$$x(0) = 1$$

будет $x(t) = t^2 + 1$. Это – парабола, проходящая через точку (0, 1).

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

где t – независимая переменная; $x(t)$ – неизвестная функция; $f(t,x)$ – заданная функция, определенная в открытой области $\mathcal{D}$ переменных t, x.

Задача. Если $(t_0, x_0) \epsilon \mathcal{D}$, то существует ли решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

условию 2? Поставленную задачу назовём задача (1)-(2).

Решение задачи определяется следующей теоремой:

Теорема 1. (существование и единственность решения)

Пусть функция $f(t,x)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются непрерывными функциями на всем открытом множестве $\mathcal{D}$.

Тогда: *1) для любой точки (t_0, x_0) множества $\mathcal{D}$ существует решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) удовлетворяющее условию (2);*

2) если два решения $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ уравнения (1) совпадают хотя бы для одного значения $t = t_0$, т.е., если

$$\varphi(t_0) = \psi(t_0),$$

то эти решения тождественно равны для всех, тех значений переменного t, для которых они оба определены.

Проведем некоторые разъяснения по выводам теоремы 1. Утверждение, что решение $x = \varphi(t)$ удовлетворяет начальному условию (2) предполагает, что интервал $r_1 < t < r_2$ определения решения $x = \varphi(t)$ содержит точку t_0.

Далее теорема 1 утверждает, что координаты любой точки (t_0, x_0) множества $\mathcal{D}$ являются начальными значениями для некоторого решения уравнения (1) и что два решения с общими начальными значениями совпадают.

Геометрическое содержание теоремы 1 заключается в том, что через каждую точку (t_0, x_0) множества $\mathcal{D}$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1) (рис.7).

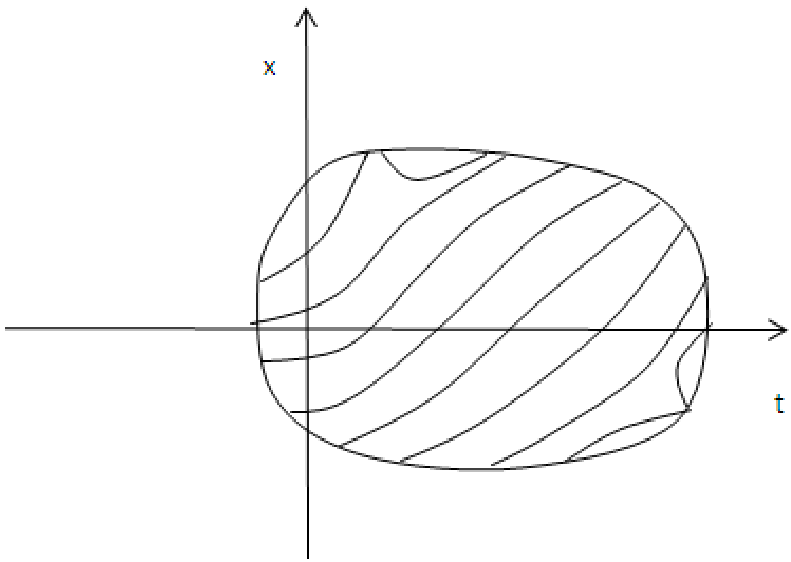


Рисунок. 7.

Рассмотрим <u>пример</u>.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$x' = ax, \tag{3}$$

где a – действительное число. Здесь

$$f(t,x) = ax.$$

Функция $f(t,x)$ зависит только от переменного x. Множество, где определена функция $f(t,x)$, совпадает со всей плоскостью R^2. Сама функция $f(t,x) = ax$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ являются непрерывными функциями переменных t и x во всей плоскости R^2. Выполняются все условия теоремы 1.

Для любой точки $(t_0, x_0) \epsilon R^2$ существует решение $x = \varphi(t)$ удовлетворяющее условию $x_0 = \varphi(t_0)$. Непосредственной подстановкой в (3) проверяется, что каждая функция

$$x(t) = Ce^{at} \tag{4}$$

где C – произвольное действительное число, является решением уравнения (3).

Решение (4) определено на всей прямой $-\infty < t < +\infty$. В (4), полагая $t = t_0$, определяем решение удовлетворяющее условию $x_0 = \varphi(t_0)$. Действительно $x(t_0) = Ce^{at_0}$ или $x_0 = Ce^{at_0}$.

Отсюда определяем $C = x_0 e^{-at_0}$. Значение C подставляя в (4) получим

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}. \tag{5}$$

Решение (5) удовлетворяет заданному начальному условию.

Подбирая различные точки (t_0, x_0) плоскости R^2, получим различные решения уравнения (3) из (4). Таким образом, функция (4) является общим решением уравнения (3).

Такая процедура нахождения решений удовлетворяющее заданным начальным условиям сохраняется и для общего случая.

Если задано уравнение (1) и мы каким-то способом нашли общее решение, которая содержит произвольную постоянную C, т.е.

$$x = \varphi(t, C). \tag{6}$$

В (6) подставляя значения $t = t_0, x = x_0$ определяем значение $C = C_0$. Тогда получим решение $x(t) = \varphi(t, C_0)$, удовлетворяющее начальному условию.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x = \varphi(t)$ – некоторое решение уравнения (1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$ и пусть

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

Тогда для функции $\varphi(t)$ на всем интервале $r_1 < t < r_2$ выполняется интегральное тождество

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau. \qquad (7)$$

Обратно, если для некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$ на интервале $r_1 < t < r_2$ выполнено тождество (7), то функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема, является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальному условию (2).

Докажем это.

Пусть выполняется (7). Полагая $t = t_0$ получаем $\varphi(t_0) = x_0$. $f(\tau, \varphi(\tau)$ непрерывна, тогда правая часть (7) дифференцируема. Продифференцировав тождество (7), получим тождество

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad (8)$$

Пусть выполняется тождества (8) и (2).

Проинтегрировав (8) от t_0 до t имеем,

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau.$$

Отсюда получим (7).

Из доказанного предложения вытекает, для доказательства существования решения задачи (1) и (2) достаточно доказать существование решения уравнения (7) (интегрального уравнения).

Построим последовательность

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots \tag{9}$$

непрерывных функций, определенных на некотором отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$, который содержит внутри себя точку t_0. Каждая функция последовательности (9) определяется через предыдущую при помощи равенства

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big) d\tau, \ k = 0,1,2, \dots \tag{10}$$

Если график функции $\varphi_k(t)$ проходит в множестве $\mathcal{D}$, то график $\varphi_{k+1}(t)$ также должна пройти в множестве $\mathcal{D}$. Иначе невозможно определить функцию $\varphi_{k+2}(t)$. Покажем, как этого можно добиться.

По условию теоремы 1, для любого $(t, x) \epsilon \mathcal{D}$ функции $f(t, x)$, $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывны, тогда для всех $(t, x) \epsilon \mathcal{D}$ выполнены неравенства

$$|f(t, x)| \leq \mathrm{C}_1, \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leq \mathrm{C}_2,$$

где C_1, C_2–некоторые положительные числа.

Область $\mathcal{D}$ – открытая, тогда для любого $(t_0, x_0) \epsilon \mathcal{D}$ существует прямоугольник Π_r определяемый неравенствами

$$|t - t_0| \leq r, |x - x_0| \leq a$$

и $\Pi_r \subset \mathcal{D}$.

Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных функций, заданных на отрезке $|t - t_0| \leq r$, графики которых проходят в прямоугольнике Π_r.

Таким образом, функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $|t - t_0| \leq r$, тогда и только тогда принадлежит семейству Ω_r, когда для любого t, принадлежащего этому отрезку, выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - x_0| \leq a \tag{11}$$

Вернемся к последовательности (9).

Выясним, при каких условиях $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r$.

$$\varphi_0(t) \equiv x_0 \epsilon \Omega_r.$$

$$|\varphi_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)| d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r.$$

Если $C_1 \cdot r \leq a$ или $r \leq \frac{a}{C_1}$, то $\varphi_1(t) \epsilon \Omega_r$.

Далее

$$|\varphi_2(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)| d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r \leq a,$$

$$r \leq \frac{a}{C_1}. \qquad (12)$$

Таким образом, при выполнении условия (12) $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r,\ k = 0,1,2, \ldots$.

Теперь докажем равномерную сходимость последовательности (9), на отрезке $|t - -t_0| \leq r$. Для решения этой задачи, докажем равномерную сходимость ряда

$$\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ \ldots +$$

$$+(\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \ \ldots \qquad (13)$$

Воспользуемся признаком Вейерштрасса.

Имеем

$$|\varphi_0| = |x_0|,$$

$$|\varphi_1 - \varphi_0| = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r \leq a,$$

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_1) - f(\tau, x_0)| d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\partial f(\tau, \theta)}{\partial x}\right| |\varphi_1 - \varphi_0| d\tau \leq$$

$$\leq C_2 \cdot |t - t_0| \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \leq C_2 \cdot r \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \leq C_2 \cdot r \cdot a,$$

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \leq C_2 \cdot r \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0|.$$

Если $C_2 \cdot r < 1$, то

$$r < \frac{1}{C_2}. \qquad (14)$$

Обозначим $C_2 \cdot r = q$.

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_2) - f(\tau, \varphi_1)| d\tau \leq \int_{t_0}^{t} C_2 |\varphi_2 - \varphi_1| d\tau \leq$$

$$\leq C_2 \cdot q \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \times |t - t_0| \leq C_2 \cdot r \cdot q \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| =$$

$$= q^2 \cdot max|\varphi_1 - \varphi_0| \leq q^2 \cdot a.$$

Продолжая процесс, получим

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq q^k a.$$

В итоге имеем

$$\left|\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)\right| \leq |\varphi_0| + \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq$$

$$\leq |\varphi_0| + a \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Числовой ряд сходится, тогда для значений $|t - t_0| < r$

$\left(r = min\left\{\frac{1}{C_2}, \frac{a}{C_1}\right\}\right)$ последовательность функций (9) равномерно сходится к некоторой функции $\varphi(t)$. В (10) переходя к пределу при $k \to +\infty$ получим,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau.$$

Итак, существование решения $x = \varphi(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (2) доказано; при этом установлено, что решение $x = \varphi(t)$ определено на интервале $|t - t_0| < r$, где r – произвольное число удовлетворяющее неравенствам (12), (14).

Перейдем к доказательству единственности.

Пусть $x = \varphi(t), x = \psi(t)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (2), т.е.

$$\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = x_0$$

и общим интервалом $r_1 < t < r_2$ определения.

Рассмотрим прямоугольник Π_r. Поскольку $\varphi(t), \psi(t)$ являются решениями уравнения (7), то они принадлежат семейству Ω_r.

Имеем

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = \int_{t_0}^{t} \left|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right| \leq$$

$$\leq C_2 \cdot |t - t_0||\varphi(t) - \psi(t)| \leq$$

$$\leq C_2 \cdot r \times |\varphi(t) - \psi(t)| = q \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|,$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < q \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Это возможно только при условии $\varphi(t) \equiv \psi(t)$. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ

Метод, примененный при доказательстве теоремы 1 называется ***методом последовательных приближений или методом Пикара***.

В теореме 1, условие «Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ является непрерывной функцией на всем открытом множестве $\mathcal{D}$» можно заменить на условие «Функция по переменной x удовлетворяет условию Липшица», т.е.

$$\forall(t, x_1) \text{ и } \forall(t, x_2)|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

где L – некоторая постоянная независящая от x_1 и x_2.

Условие, сформулированное в теореме 1, является более сильным требованием по сравнению с условием Липшица. Это означает, что существование непрерывной частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ гарантирует выполнимость условия Липшица. Из условия Липшица не всегда вытекает непрерывность частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Действительно, пусть $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна в области $\mathcal{D}$. Возьмем произвольный отрезок $[x_1, x_2] \subset \mathcal{D}$. К функции $f(t, x)$применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = \frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x}(x_1 - x_2), x_1 < \theta < x_2.$$

$\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x}$ непрерывна, тогда

$$\left|\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x}\right| \leq L.$$

Учитывая это, имеем

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Пример.

Для уравнения $x'(t) = x(t)$ найдем решение методом последовательных приближений.

Пусть $t_0 = 0, x_0 = 1$.

Интегральное уравнение запишется в виде

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Построим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots.$$

Имеем

$$\varphi_0(t) \equiv 1,$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \varphi_0(\tau)\, d\tau = 1 + t,$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau)\, d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!}\right) d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Пределом этой последовательности, равномерно сходящейся на любом отрезке числовой оси, является функция $\varphi(t) = e^t$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Основной задачей, возникающей перед нами, когда мы имеем дело с дифференциальным уравнением, является задача отыскания его решений.

Первоначально для решения этой задачи стремились «интегрировать дифференциальные уравнения в квадратурах», т.е. пытались записать решение при помощи элементарных функций и интегралов от них. Позже, когда выяснилось, что решение в этом смысле существует лишь для очень немногих типов уравнений, центр тяжести теории был перенесен на изучение общих закономерностей поведения решений.

Далее мы рассмотрим некоторые классы дифференциальных уравнений, решения которых можно найти методом интегрирования в квадратурах.

УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Пусть задано уравнение

$$x'(t) = \frac{f(t,x)}{g(t,x)} \qquad (1)$$

Предположим, что функции $f(t,x)$, $g(t,x)$ определены и непрерывны на некотором открытом множестве $\mathcal{D}$ плоскости R^2 переменных t и x , причем $\forall (t,x) \epsilon \mathcal{D} \; (g(t,x) \neq 0)$.

Уравнение (1) преобразуем к виду $\left(x' = \frac{dx}{dt}\right)$

$$g(t,x)dx - f(t,x)dt = 0 \qquad (2)$$

Пусть выражение, в левой части (2) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(t,x)$ на всем множестве $\mathcal{D}$. Это означает, что для любого $(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = g(t,x), \; \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -f(t,x) \qquad (3)$$

Пусть $x = \varphi(t)$ – решение дифференциального уравнения (1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$.

Тогда имеем

$$\varphi'(t) = \frac{f(t,\varphi(t))}{g(t,\varphi(t))},$$

откуда получаем

$$g\big(t,\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) - f\big(t,\varphi(t)\big) = 0.$$

Левая часть этого равенства, в силу (3), представляет собой полную производную функции $F\big(t,\varphi(t)\big)$ по t.

Тогда

$$\frac{dF(t,\varphi(t))}{dt} = 0$$

на всем интервале $r_1 < t < r_2$.

Отсюда

$$\forall t \epsilon (r_1, r_2)(F(t,\varphi(t)) = C - const).$$

Мы доказали, для любого решения $x = \varphi(t)$ уравнения (1) справедливо тождество

$$F(t,\varphi(t)) = C$$

Теперь докажем, каждая функция $x = \varphi(t)$, заданная на некотором интервале и определяемая как неявная функция из уравнения

$$F(t,x) = C \tag{4}$$

является решением дифференциального уравнения (1).

Дифференцируя тождество (4) по t, в силу (3), получаем:

$$g(t,x) \cdot \varphi'(t) - f\big(t,\varphi(t)\big) = 0.$$

Откуда видно, что $x = \varphi(t)$ решение уравнения (1).

Доказанному, можно придать следующее геометрическое истолкование: Каждая интегральная кривая дифференциального уравнения (1), расположена целиком на некоторой линии уровня функции $F(t,x)$, т.е. определяется уравнением (4). Обратно, каждая связная часть линии уровня (4) представляет собой интегральную кривую.

Возможно линии уровня функции $F(t,x)$ может состоять из нескольких отдельных кусков, то в этом случае целая линия уровня не является одной интегральной кривой, а распадается на несколько интегральных кривых, т.е. одна константа C может, в силу неявного уравнения (4), определять несколько, даже бесконечно много различные решения.

Пусть задано уравнение (2). При каких условиях уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах?

Для ответа на поставленный вопрос предположим, что существует функция $F(t,x)$ определенная и непрерывная по переменным t,x и имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}$ в $\mathcal{D}$.

Пусть

$$dF(t,x) = g(t,x)dx - f(t,x)dt.$$

Тогда имеем тождество

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dx = g(t,x)dx - f(t,x)dt.$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -f(t,x), \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = g(t,x) \qquad (5)$$

Пусть функции $g(t,x), f(t,x)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$ в $\mathcal{D}$.

При таком условии

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t}.$$

В силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial t}$ в области $\mathcal{D}$ для любых $(t, x) \epsilon \mathcal{D}$:

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t}.$$

Тогда

$$-\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t} \qquad (6)$$

Предполагая, что левая часть (2) является полным дифференциалом некоторой функции $F(t, x)$, мы получили условие (6). Можно доказать, если выполняется (6), то уравнение (2) будет уравнением в полных дифференциалах.

Таким образом, условие (6) является необходимым и достаточным, чтобы уравнение (2) было уравнением в полных дифференциалах.

Если выполняется условие (5), то общее решение можно записать в виде

$$-\int_{t_0}^{t} f(\tau, x) d\tau + \int_{x_0}^{x} g(t_0, \xi) d\xi = C \qquad (7)$$

или

$$-\int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau + \int_{x_0}^{x} g(t, \xi) d\xi = C \qquad (8)$$

Общее решение уравнения (2), можно найти другим способом. Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию (5). Интегрируя, первое уравнение по t имеем

$$F(t, x) = -\int f(t, x) dt + \varphi(x), \qquad (9)$$

где, $\varphi(x)$ любая функция от x.

Выберем $\varphi(x)$так, чтобы функция (9) была решением второго уравнения. Дифференцируя (9) по x и полагая $\frac{\partial F}{\partial x} = g(t, x)$, получим

$$\varphi'(x) = v(x),$$

где $v(x)$ – некоторая функция от x. Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\varphi(x) = \int v(x)dx.$$

Теперь общее решение уравнения (2) можно записать так:

$$-\int f(t,x)dt + \int v(x)dx = \mathrm{C}.$$

Аналогично, исходя из уравнения $\frac{\partial F}{\partial t} = -f(t,x)$ получим,

$$\int g(t,x)dx + \int v_1(t)dt = C.$$

<u>Примеры:</u>

1. $tdt + xdx = 0$

Проверим условие (6):

$$f(t,x) = -t,\ g(t,x) = x, \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Значит заданное уравнение в полных дифференциалах.

Уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\left(d(t^2) + d(x^2)\right) = 0.$$

Проинтегрировав это равенство, получим

$$\frac{1}{2}(t^2 + x^2) = C.$$

Это общее решение.

Решение можно получить и по формуле (7) или (8). Имеем

$$\int_{t_0}^{t} \tau d\tau + \int_{x_0}^{x} \xi d\xi = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}t_0^2 - \frac{1}{2}x_0^2 = C,$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\xi^2 = C_1 \equiv C + \frac{1}{2}(t_0^2 + x_0^2).$$

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Пусть задано уравнение

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0. \tag{1}$$

(1) не является уравнением в полных дифференциалах.

Определение. Если существует функция $\mu(t,x)$такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения (1), получается уравнение

$$\mu M dt + \mu N dx = 0 \tag{2}$$

в полных дифференциалах, то функция μ называется интегрирующим множителем.

Поскольку уравнение (2) в полных дифференциалах, в предположении непрерывной дифференцируемости функции $\mu(t,x)$, можно получить следующее уравнение для определения функции $\mu(t,x)$:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

или

$$N\frac{\partial\mu}{\partial t} - M\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial M}{\partial x} - \mu\frac{\partial N}{\partial t} \tag{3}$$

<u>Пример.</u> Пусть

$$(1 - t^2x)dt + t^2(x - t)dx = 0.$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -t^2, \frac{\partial N}{\partial t} = 2tx - t^2,$$

$$M(t,x) = 1 - t^2x,$$

$$N(t,x) = t^2(x - t).$$

Условие $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ не выполняется, значит, заданное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Существует ли интегрирующий множитель $\mu(t,x)$? Предположим, что $\mu(t,x)$ зависит только от t.

Тогда, из (3) имеем

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{-t^2 - 2tx + 3t^2}{t^2(x-t)} = \frac{2t(t-x)}{t^2(x-t)} = -\frac{2}{t},$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{t}.$$

Отсюда получим

$$ln\mu = -2lnt, \mu = \frac{1}{t^2}.$$

Теперь, умножая обе части заданного уравнения на $\frac{1}{t^2}$, имеем

$$\left(\frac{1}{t^2} - x\right)dt + (x - t)dx = 0,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{t^2} - x\right)}{\partial x} = -1, \frac{\partial(x-t)}{\partial t} = -1.$$

Получили уравнение в полных дифференциалах. Возможно, также, что функция μ зависит только от x.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение

$$x'(t) = a(t)x + b(t) \qquad (1)$$

называется линейным уравнением первого порядка, где $x(t)$ - неизвестная функция, $a(t), b(t)$ – заданные функции.

Поставим задачу решения уравнения (1). Предположим, что функции $a(t), b(t)$ непрерывны на некотором интервале $r_1 < t < r_2$. Для правой части уравнения (1) выполняются все условия теоремы 1. Пусть t_0 некоторая точка интервала $r_1 < t < r_2$.

Положим

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau.$$

Докажем, что совокупность всех решений уравнения записывается формулой

$$x = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau\right) e^{A(t)} \qquad (2)$$

где, x_0 – произвольная постоянная. Функция (2) является решением (1). Это проверяется непосредственной подстановкой. Докажем, что (2) содержит все решения уравнения (1).

Пусть $\varphi(t)$ решение (1), определенное на интервале $r_1 \le s_1 < t < s_2 \le r_2$.

Пусть τ_0, ξ_0 – начальные значения решения $x = \varphi(t)$. Докажем, что так можно подобрать число x_0 в формуле (2), чтобы определяемое этой формулой решение имело своими значениями τ_0, ξ_0, т.е.

$$\varphi(\tau_0) = \xi_0 = \left(x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau\right) e^{A(\tau_0)}. \qquad (3)$$

Если верно (3), то из (3) определяется однозначное значение x_0

$$x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau = \xi_0 e^{-A(\tau_0)} (A(\tau_0) \neq 0),$$

$$x_0 = \xi_0 e^{-A(\tau_0)} - \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau.$$

Найденное x_0 подставляя в (2), имеем $\big(x = \varphi(t)\big)$.

$$\varphi(t) =$$

$$= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} - \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)} =$$

$$= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)}.$$

$$\varphi(t) = \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)}.$$

Отсюда при $t = \tau_0$ имеем $\varphi(\tau_0) = \xi_0$.

Или

$$x(t) = x_0 e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}} + \int_{\tau_0}^{t} b(\tau) e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}\, d\tau.$$

Пример.

Пусть задано уравнение

$$x'(t) = t \cdot x(t) + sint.$$

Найдем общее решение уравнения по формуле (2)

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{\tau_0}^{t} b(\tau) e^{\frac{-\tau^2 + t_0^2}{2}}\, d\tau \right) e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}.$$

Решение уравнения (1) можно найти другим способом.

Рассмотрим уравнение

$$y'(t) = a(t) y(t) \qquad (4)$$

(4) называется однородным уравнением уравнения (1), само уравнение (1) называется неоднородным.

Полагая

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

уравнение перепишем в виде

$$\frac{dy}{y} = a(t)dt \qquad (5)$$

Проинтегрировав (5), имеем

$$ln|y| = \int a(t)dt + C_1 = A(t) + C_1$$

или

$$y = e^{A(t)+C_1} = Ce^{A(t)} \qquad (6)$$

В (6), считая C функцией от t , получим решение неоднородного уравнения (1).

Пусть

$$\varphi(t) = C(t)e^{A(t)} \qquad (7)$$

(7) подставляя в (1), получим

$$\varphi'(t) = C'(t)e^{A(t)} + C(t)e^{A(t)} = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t),$$

или $C'(t)e^{A(t)} = b(t)$.

Отсюда находим

$$C'(t) = b(t)e^{-A(t)},$$

$$C(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau)e^{-A(\tau)}\,d\tau,$$

где x_0 – константа интегрирования.

Общее решение (1) определяется формулой

$$x(t) = \left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-A(\tau)}\, d\tau \right) e^{A(t)}.$$

Примененный метод называется методом вариации постоянной.

УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнения вида

$$x'(t) = f(t)g(x) \tag{1}$$

называются уравнениями с разделяющимися переменными.

Пусть $f(t)$ определена и непрерывна на интервале $r_1 < t < r_2$, а $g(x)$ определена, непрерывна и не обращается в нуль на интервале $q_1 < t < q_2$.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{g(x)} - f(t)dt = 0 \tag{2}$$

Уравнение (2) есть уравнение в полных дифференциалах. Функция $F(t, x)$ задается формулой

$$F(t, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau.$$

Все решения уравнения (1) получаются, как неявные функции из соотношения

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau = C \tag{3}$$

Примеры.

1. $x' = -\frac{t}{x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными

$$xdx = -tdt$$

Общее решение, согласно (3), определяется так

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = -\int_{t_0}^{t} \tau \, d\tau,$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2),$$

$$x^2 + t^2 = x_0^2 + t_0^2 \equiv C^2,$$

$$x^2 + t^2 = C^2.$$

2. $x \cdot x' = -t^3.$

Общее решение заданного уравнения представляется неявной функцией

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}t^4 = C.$$

3. $x' = -\frac{2x}{t}$

Общее решение определяется так:

$$\frac{x'}{x} = -\frac{2}{t}, \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2}{t} dt,$$

$$lnx = -2lnt + C, lnx + lnt^2 = C, \frac{x}{t^2} = e^C.$$

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть рассматривается функция $f(t,x)$.

Если выполняется тождество

$$f(kt,kx) = k^m f(t,x),$$

то функция $f(t,x)$ называется однородной функцией степени m.

Пусть задано уравнение

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0. \quad (1)$$

Если в (1) функции $M(t,x), N(t,x)$ – однородные функции одной и той же степени, то уравнение (1) называется однородным.

Пусть в (1) функции $M(t,x), N(t,x)$ определены и непрерывны в некоторой открытой области $\mathcal{D}$ переменных t и x, причем $\forall(t,x) \in \mathcal{D}$ $(N(t,x) \neq 0)$.

При таких условиях, уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right). \quad (2)$$

Действительно, функции $M(t,x), N(t,x)$ запишем в виде

$$M(t,x) = M\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right),$$

$$N(t,x) = N\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right).$$

Учитывая однородность функций $M(t,x), N(t,x)$ имеем

$$M\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right) = t^m M\left(1, \frac{x}{t}\right),$$

$$N\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right) = t^m N\left(1, \frac{x}{t}\right).$$

Тогда

$$\frac{M(t,x)}{N(t,x)} = \frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)}.$$

Из уравнения (1) находим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)}. \tag{3}$$

Правая часть уравнения (3), зависит лишь от отношения переменных t и x. Введя обозначения

$$h\left(\frac{x}{t}\right) \equiv -\frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)}$$

(3) перепишем в виде (2).

Займемся решением уравнения (2). Введем новую неизвестную функцию

$$u(t) = \frac{x(t)}{t}.$$

Отсюда получим $x = t \cdot u$. Находим $x' = u + t \cdot u'$. Подставляя вместо x выражение $u + t \cdot u'$, из (2) получим

$$u + t \cdot u' = h(u)$$

или

$$t \cdot u' = h(u) - u \tag{4}$$

Уравнение (4) с разделяющимися переменными. Из (4) получим

$$\frac{du}{h(u)-u} = \frac{dt}{t}. \tag{5}$$

Проинтегрировав (5), получим общее решение в неявной форме

$$\int_{u_0}^{u} \frac{d\xi}{h(\xi)-\xi} = ln|t| + C.$$

Введем обозначение

$$\varphi(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{d\xi}{h(\xi)-\xi}.$$

Тогда, общее решение уравнения (2) записывается в виде

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - ln|t| = C.$$

<u>Примеры.</u>

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t}$.

Полагая $x = t \cdot u$, найдем $\frac{dx}{dt} = u + t \cdot \frac{du}{dt}$.

Найденные значения, подставляя в заданное уравнение, получим

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = 1 + u \text{ или } \frac{du}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Полученное уравнение, проинтегрировав, имеем

$$\int_{u_0}^{u} d\xi = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} d\tau, u - u_0 = ln|t| - ln|t_0|,$$

$$u = ln|t| + C,$$

где $C = u_0 - ln|t_0|$ – произвольная постоянная.

Поскольку $u = \frac{x}{t}$, то

$$x = t \cdot (ln|t| + C).$$

2. $t(t+2x)dt + (t^2 - x^2)dx = 0$

Заданное уравнение представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(t+2x)}{x^2-t^2}.$$

Отсюда получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+2\frac{x}{t}}{\left(\frac{x}{t}\right)^2-1}.$$

Полагая $\frac{x}{t} = u$, находим $x = t \cdot u$, $\frac{dx}{dt} = u + t \cdot \frac{du}{dt}$.

Тогда

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1+2u}{u^2-1}$$

или

$$t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1+2u}{u^2-1} - u = \frac{1+3u-u^3}{u^2-1},$$

$$\frac{(u^2-1)du}{1+3u-u^3} = \frac{1}{t}.$$

Левую часть уравнения, представим в виде

$$-\frac{1}{3}\frac{d(1+3u-u^3)}{1+3u-u^3} = \frac{1}{t}$$

или

$$\frac{d(1+3u-u^3)}{1+3u-u^3} = -\frac{3}{t}$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$ln|1 + 3u - u^3| = -3ln|t| + C.$$

Отсюда

$$(1 + 3u - u^3) \cdot t^3 = e^C \equiv C_0.$$

Вместо u, подставляя $u = \frac{x}{t}$, имеем

$$\left(1 + 3\frac{x}{t} - \frac{x^3}{t^3}\right) \cdot t^3 = C_0,$$

$$t^3 + 3xt^2 - x^3 = C_0.$$

3. $(t^2 - x^2)dt + 2txdx = 0.$

Для решения этого уравнения, представим ее в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-t^2}{2tx}.$$

Введя, новую функцию $x = t \cdot u$, получим

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{u^2-1}{2u}.$$

Отсюда

$$t \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{u^2+1}{2u}$$

или

$$\frac{2u}{u^2+1} = -\frac{dt}{t}, \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\frac{dt}{t}.$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$\int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\int \frac{dt}{t}, ln(u^2+1) + ln|t| = C,$$

$$(u^2+1)t = C, \frac{x^2+t^2}{t} = C.$$

УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНОМУ

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right) \qquad (1)$$

Пусть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда введя, новые переменные

$$t = \xi + \alpha, x = \eta + \beta,$$

где ξ, η - новые переменные; α, β – некоторые постоянные числа, уравнение (1) приведем к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right) \qquad (2)$$

Уравнение (2) однородное.

Числа α, β определяются из соотношения

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

то (1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{k(a_2t+b_2x)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right). \quad (4)$$

Действительно, из соотношения (3),получим $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ или $a_1 = \frac{b_1}{b_2}a_2$. Значение a_1 подставляя в (1) получим

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{\frac{b_1}{b_2}a_2t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right) = f\left(\frac{\frac{b_1}{b_2}(a_2t+b_2x)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right).$$

Введя обозначение $\frac{b_1}{b_2} = k$, имеем (4).

Если в уравнении (4) произвести замену: $a_2t + b_2x = y$ – новую неизвестную функцию, то (4) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2}f\left(\frac{ky+c_1}{y+c_2}\right). \quad (5)$$

(5) уравнение, не содержащее независимой переменной.

Введя обозначение

$$g(y) \equiv \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2}f\left(\frac{ky+c_1}{y+c_2}\right)$$

Уравнение (5) запишем в виде (при условии $g(y) \neq 0$)

$$\frac{dy}{g(y)} = dt.$$

Интегрируя, это уравнение, получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} = t + C.$$

Если предположить, что $\frac{1}{g(y)}$ - непрерывная функция на интервале $q_1 < y < q_2$, то решение представляется в виде

$$G(y) = t + C.$$

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Уравнение вида

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^n(t) \tag{1}$$

называется уравнением Бернулли.

В (1) $a(t)$, $b(t)$ заданные функции, определенные и непрерывные на интервале $r_1 < y < r_2$, n – вещественное число, отличное от 0 и 1. При $n = 0$ и $n = 1$ уравнение (1) обращается в линейное уравнение.

Уравнение (1) сведем к линейному уравнению. Для этого обе части уравнения (1) разделим на $x^n(t)$. Уравнение (1), всегда имеет тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ при $n > 0$. Наша задача состоит в отыскании нетривиальных решений, т.е. $x(t) \not\equiv 0$.

После деления, получим

$$x^{-n}x'(t) = a(t)x^{-n+1}(t) + b(t) \tag{2}$$

В (2) введем новую неизвестную функцию

$$y(t) = x^{-n+1}(t).$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{1-n}y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

Получили линейное уравнение относительно функции $y(t)$.

Примеры.

1. Пусть задано уравнение

$$x' = 2tx + 3t^3x^2.$$

Это – уравнение Бернулли и $n = 2$. Обе части уравнения, разделив на x^2, получим

$$x^{-2}x' = 2tx^{-1} + 3t^3.$$

Полагая $y = x^{-1}$, имеем линейное уравнение

$$y' = -2ty - 3t^3.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-t^2} + \frac{3}{2}(1 - t^2).$$

Отсюда учитывая, что $y = x^{-1}$ находим общее решение заданного уравнения

$$x(t) = \frac{1}{Ce^{-t^2} + \frac{3}{2}(1 - t^2)}.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$x' + \frac{t}{1-t^2}x = t\sqrt{x}.$$

Делим обе части на $\sqrt{x}$:

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} + \frac{t}{1-t^2}\sqrt{x} = t.$$

Положим $\sqrt{x} = y$ и получим

$$y' + \frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}y = \frac{1}{2}t.$$

Интегрируя это линейное уравнение, находим

$$y = C\sqrt[4]{1 - t^2} - \frac{1}{3}(1 - t^2).$$

Следовательно,

$$\sqrt{x} = C\sqrt[4]{1 - t^2} - \frac{1}{3}(1 - t^2)$$

есть общее решение заданного уравнения.

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Уравнение вида

$$x'(t) = a(t)x + b(t)x^2 + c(t) \qquad (1)$$

называется уравнением Риккати.

Относительно функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ будем предполагать, что они определены и непрерывны на интервале $r_1 < y < r_2$. При таком предположении в полосе

$$\Pi = \{(t,x), r_1 < y < r_2, |x| < +\infty\}$$

выполняются все условия теоремы 1 и через любую точку $(t_0, y_0) \epsilon \Pi$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (1).

Уравнение Риккати интегрируется в квадратурах, лишь в исключительных случаях.

Если известно одно частное решение x_1 уравнения Риккати, то подстановка

$$x = x_1 + \frac{1}{y}, \qquad (2)$$

где y – новая неизвестная функция, приводит это уравнение к уравнению Бернулли.

Действительно, (2) подставляя в (1) имеем

$$x_1' - \frac{1}{y^2} \cdot y' = a(t)x_1 + b(t)x_1^2 + c(t) + \frac{a(t)}{y} +$$

$$+2b(t)x_1 \cdot \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Учитывая, что x_1 – решение уравнения (1) отсюда получим

$$-\frac{1}{y^2} \cdot y' = \frac{a(t)}{y} + 2b(t)x_1 \cdot \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}$$

или

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = (a(t) + 2b(t)x_1)\frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Если, обозначим $\frac{1}{y} = z$, то

$$z' = (a(t) + 2b(t)x_1)z + b(t) \cdot z^2 \qquad (3)$$

(3) уравнение Бернулли.

Нетрудно проверить, уравнение Риккати вида

$$x' = ax^2 + \frac{b}{t}x + \frac{c}{t^2}, \qquad (4)$$

где, a, b, c – постоянное числа, причем $(b+1)^2 \geq 4ac$ имеет частное решение вида

$$x_1 = \frac{a_1}{t}, \qquad (5)$$

где a_1 – некоторая постоянная, которая определяется подстановкой (5) в (4).

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно, имеет вид

$$F(t, x, x') = 0. \qquad (1)$$

$F(t, x, x')$ является функцией трех переменных. Соотношение (1) в некоторых случаях определяет переменное x', как неявную функцию переменных t и x.

Если это уравнение удается разрешить относительно x', то получаем одно или несколько уравнений

$$x' = f_k(t, x), \; k = 1,2, \dots \qquad (2)$$

Существование решения уравнения (1) связано с возможностью разрешить его относительно x' и существованием решений уравнений (2). Достаточные условия разрешимости уравнения (1) определяются известными из курса анализа условиями существования неявной функции и ее непрерывности вместе с производной.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. (о существовании и единственности решения)

Если в некотором замкнутом трехмерном прямоугольнике $\mathcal{D}_3$ *с центром в точке* (t_0, x_0, x_0'), *где* x_0' *- действительный корень уравнения* $F(t_0, x_0, x_0') = 0$ *, выполнены условия:*

1) $F(t, x, x')$ *непрерывна по совокупности аргументов вместе с частными производными*

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x'};$$

2) $\frac{\partial F}{\partial x'}(t_0, x_0, x_0') \neq 0$ *, то в окрестности точки* $t = t_0$ *существует решение* $x = x(t)$ *уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0' \tag{3}$$

Доказательство. В силу условий 1), 2) теоремы, в окрестности точки (t_0, x_0, x_0') выполнены условия существования и единственности неявной функции

$$x' = f(t, x) \tag{4}$$

удовлетворяющей условию

$$x'(t_0) = x_0' = f(t_0, x_0). \tag{5}$$

При этом существует замкнутый прямоугольник $\mathcal{D}_2$ с центром в точке (t_0, x_0) , в котором функция $f(t, x)$непрерывна вместе с производной $\frac{\partial f}{\partial x}$. Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,f(t,x))}{\frac{\partial F}{\partial x'}(t,x,f(t,x))} \tag{6}$$

Таким образом, правая часть уравнения (4) удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Тогда существует единственное решение уравнения $x(t)$, определенное на некотором отрезке

$|t - t_0| \le r$ удовлетворяющее условию

$$x(t_0) = x_0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 гарантирует разрешимость уравнения (1) и для каждого из уравнения (2) существование и единственности решения.

Итак, если из (1) получим (2) и правые части (2) удовлетворяют условию теоремы 1, то через каждую точку (t_0, x_0) некоторой области $\mathcal{D}$ переменных t, x проходит единственная интегральная кривая каждого из уравнений (2), причем все они являются решениями уравнения (1). Отметим, направление вектора касательной кривой $x_k(t)$ уравнения (2) в точке (t_0, x_0) определяется значением функции $f_k(t_0, x_0)$. Если эти значения различны, то через точку (t_0, x_0) проходит столько интегральных кривых каково число уравнений (2). Поэтому для выделения определенного решения уравнения (1), надо не только задать начальные данные (t_0, x_0), но и значение производной решения $x'(t_0) = x'_0$. Очевидно, это значение не может быть задано произвольно: x'_0 должно быть корнем уравнения

$$F(t_0, x_0, x'_0) = 0$$

Пример. Пусть рассматривается уравнение

$$(x')^2 - (t + x)x' + tx = 0 \tag{7}$$

Разрешая его относительно производной x', получим два уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной:

$$x' = x, \tag{8}$$

$$x' = t. \tag{9}$$

Общее решения уравнения (8), (9) имеют вид

$$x = C_1 e^t, \tag{10}$$

$$x = \frac{t^2}{2} + C_2 \tag{11}$$

Оба семейства решений (10), (11) удовлетворяют исходному уравнению. Гладкими интегральными кривыми уравнения (7) будут также кривые, составленные из дуги интегральной кривой семейства (10) и дуги интегральной кривой семейства (11), если в общей точке они имеют общую касательную.

Из семейства (10) возьмем функцию

$x = e^{t-1}(C_1 = e^{-1})$, а из семейства (11) функцию

$x = \frac{t^2+1}{2}\left(C_2 = \frac{1}{2}\right)$.

В точке $t = 1$ интегральные кривые, определяемые, этими функциями имеют, общую касательную с угловым коэффициентом равным 1.

Интегральная кривая, составленная, из дуг рассматриваемых интегральных кривых изображена на рис.1.

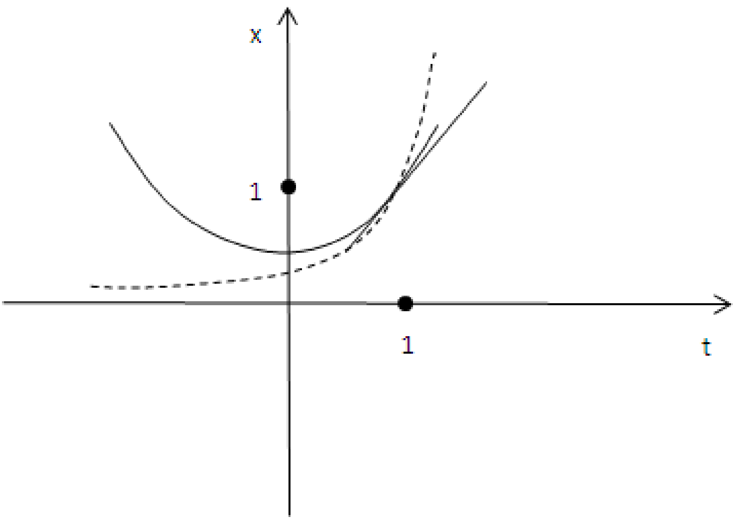


Рисунок. 1.

График функции $x = \frac{t^2+1}{2}$ определена при $-\infty < t \leq 1$, а функции $x = e^{t-1}$, при $1 \leq t < +\infty$. Также на рис. 1 изображена (пунктиром) другая интегральная кривая, составленная из дуг интегральных кривых (10), (11).

$x = \frac{t^2+1}{2}$ определена при $1 \leq t < +\infty$, а $x = e^{t-1}$ при $-\infty < t \leq 1$.

Заметим, для уравнения (7) на прямой $y = x$ не выполняется условие теоремы 2 и прямая $y = x$ представляет геометрическое место точек, где нарушается единственность решения уравнения (7).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ, ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА

Таким образом, уравнение (1) может быть проинтегрировано путем разрешения относительно x' и интеграции полученных при этом уравнений (2) уже разрешенных относительно производной. Однако интегрирование полученного уравнения (2) часто вызывает значительные трудности.

В ряде случаев представляются более удобные способы интегрирования уравнения (1).

Пусть уравнение (1) можно разрешить относительно неизвестной функции $x(t)$, т.е. уравнение (1) представимо в виде

$$x = f(t, x'). \tag{12}$$

Введем обозначения $x' = p$ и (12) перепишем в виде

$$x = f(t, p)$$

Предположим, что функция $x(t)$ является решением уравнения (1). Тогда тождество (13) можно продифференцировать по t. Имеем

$$\frac{dx}{dt} = p(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt}. \tag{14}$$

Уравнение (14) представляет собой линейное дифференциальное уравнение относительно p, и его решение можно записать в виде однопараметрического семейства

$$p(t) = \varphi(t, C) \tag{15}$$

Отсюда, используя (13), получим семейство решений исходного уравнения (1) в виде

$$x = f(x, \varphi(x, C)). \tag{16}$$

В (16), учитывая начальные условия, определяем значения C и получаем решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример. $(x')^2 - tx' + x = 0.$

Это уравнение перепишем в виде

$$x = tx' - (x')^2$$

Введем параметр $x' = p$, и получим

$$x = tp - p^2. \tag{17}$$

Откуда

$$\frac{dx}{dt} = p + t\frac{dp}{dt} - 2p\frac{dp}{dt}$$

Или

$$p = p + (t - 2p)\frac{dp}{dt} = 0.$$

Тогда

$$(t - 2p)\frac{dp}{dt} = 0.$$

Это уравнение имеет семейство решений

$$p(t) = C - \text{const}$$

и решение $p(t) = \frac{t}{2}$.

Теперь учитывая (17), получим решения исходного уравнения в виде

$$x(t) = Ct - C^2,$$

$$x(t) = t \cdot \frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4}.$$

В качестве примера применения этого метода, рассмотрим линейное, относительно t и x уравнение

$$x = t \cdot \varphi(x') + \psi(x'). \tag{18}$$

Уравнение (18) называется уравнением Лагранжа.

Уравнение (18) продифференцируем по t.

$$x' = \varphi(x') + t \cdot \frac{d\varphi}{dx'} \cdot x'' + \frac{d\psi}{dx'} \cdot x''.$$

Полагая $x' = p$, получим

$$p = \varphi(p) + t \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{d\psi}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

или

$$p = \varphi(p) + \left(t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)\right) \cdot \frac{dp}{dt},$$

$$\left(p - \varphi(p)\right) \frac{dp}{dt} = t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p). \qquad (19)$$

Это уравнение линейно относительно t и $\frac{dp}{dt}$ и легко интегрируется. Проинтегрировав (19), получаем

$$G(t, p, c) = 0 \qquad (20)$$

К (20) присоединяя (18) ($x' = p$) имеем

$$x = t \cdot \varphi(p) + \psi(p) \qquad (21)$$

Из (20) и (21) определяются искомые интегральные кривые.

Для получения (19) мы произвели деление на $\frac{dp}{dt}$. При этом, если p–const, мы теряем это решение.

Если такое решение существует, то она должна быть корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$. Итак, если уравнение $p - \varphi(p) = 0$ имеет действительные корни p_k, то к найденным решениям уравнения Лагранжа надо еще добавить

$x = t \cdot \varphi(p) + \psi(p)$, $p = p_k$, или, исключая p,

$x = t \cdot \varphi(p_k) + \psi(p_k)$ - прямые линии.

Уравнение вида

$$x = t \cdot x' + \psi(x') \;\; (\psi(x') \not\equiv ax' + b) \qquad (22)$$

называется уравнением Клеро.

Оно отличается от уравнения Лагранжа, только тем, что в нем коэффициент при t равен x'. Для решения уравнения Клеро, полагаем $x' = p$. Тогда (22) примет вид

$$x = t \cdot p + \psi(p). \qquad (23)$$

Далее имеем

$$dx = x'dt, \qquad pdt + [t + \psi'(p)]dp = pdt$$

или

$$[t+\psi'(p)]dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$dp = 0 \text{ и } t+\psi'(p) = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $p = C$. Подставляя это значение p в (23), получим

$$x = C \cdot t + \psi(C). \tag{24}$$

Это семейство прямых линий есть общее решение уравнения Клеро.

Уравнение $t+\psi'(p) = 0$, вместе с уравнением (23) образует решение уравнения Клеро в параметрической форме.

$$\left.\begin{aligned} t &= -\psi'(p), \\ x &= t \cdot p + \psi(p) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Пример. Пусть рассматривается уравнение

$$x = t \cdot x' - x'^2.$$

Это уравнение Клеро. Полагая, $x' = p$ имеем

$$x = t \cdot p - p^2.$$

Далее

$$dx = x'dt = p + t \cdot dp - 2pdp$$

или

$$pdt = pdt + (t-2p)dp.$$

Отсюда получим

$$(t-2p)dp = 0$$

или

$$dp = 0 \text{ и } t - 2p = 0.$$

Тогда $p = C$. Подставляя $p = C$ в уравнение
$$x = t \cdot p - p^2,$$
получим $x = C \cdot t - C^2$ однопараметрическое решение уравнения.

Из второго уравнения определяем $t = 2p$, и получаем решение уравнения Клеро в параметрической форме
$$\begin{cases} t = 2p, \\ x = t \cdot p - p^2. \end{cases}$$

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Система дифференциальных уравнений

$$x_k'(t) = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), k = 1,2, \dots, n \qquad (1)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка из n уравнений.

Введя векторные обозначения

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (2)$$

$$f(t, x) = \big(f_1(t, x),\ f_2(t, x), \dots, f_n(t, x)\big).$$

Систему (1) перепишем в векторной форме

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (3)$$

Установим некоторые определения и неравенства для векторов и векторных функций.

Длина или модуль $|x|$ вектора (2) определяется формулой

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Если x и yдва вектора, то имеет место неравенство

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

Из этого неравенства следует аналогичное неравенство и для произвольного числа векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$, именно

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \qquad (4)$$

Пусть $\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$ – непрерывная векторная функция действительного переменного t , т.е. вектор координаты, которого являются непрерывными функциями переменного t.

Пусть $\varphi(t)$ определена на интервале $r_1 < t < r_2$, тогда при $r_1 < t_0 < r_2$ на том же интервале можно определить векторную функцию

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau,$$

при этом компоненты $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ вектора $\psi(t)$ определяются формулами

$$\psi_k(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi_k(\tau) d\tau \,, k = 1,2, \dots, n.$$

Имеет место неравенство

$$\left| \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)| d\tau. \tag{5}$$

Пусть задана векторная функция

$$g(x) = \big(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\big),$$

определенная на выпуклом множестве Δ пространства переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если любые две точки множества Δ можно соединить отрезком, полностью принадлежащим множеству Δ, то множество Δ называется выпуклым.

Предположим, что имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_m} \right| \leq K,$$

где K - положительное число. Тогда для любых двух точек x и y множества Δ выполняются неравенства

$$|g(x) - g(y)| \leq n^2 K |x - y|. \tag{6}$$

Докажем неравенство (6). Введем в рассмотрение отрезок, соединяющий точки $x и y$:

$$z(s) = y + s(x - y),$$

где $0 \leq s \leq 1$.

Когда s пробегает отрезок $[0,1]$, то точка $z(s)$ пробегает отрезок, соединяющий точки x и y, и, ввиду выпуклости Δ, все время остается в нем.

К разности $g_k(x) - g_k(y)$, применяя, формулу Лагранжа получаем

$$g_k(x) - g_k(y) = g_k\big(z(1)\big) - g_k\big(z(0)\big) = \frac{dg_k\big(z(s)\big)}{ds}\bigg|_{z=0}.$$

Вычислим производную $\frac{dg_k(z(s))}{ds}$ по формуле от производной от сложной функции, получаем:

$$\frac{dg_k\big(z(s)\big)}{ds} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g_m\big(z_1(s), \dots, z_n(s)\big)}{\partial x_m} \cdot \frac{dz_m(s)}{ds} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g_m\big(z_1(s), \dots, z_n(s)\big)}{\partial x_m} \cdot (x_m - y_m).$$

Таким образом

$$|g_k(x) - g_k(y)| \le \sum_{m=1}^{n} K \cdot |x_m - y_m| \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{n} K \cdot |x - y| \le nK \cdot |x - y|.$$

Последнее неравенство, возведя в квадрат, затем суммируя по k, и извлекая корень, получаем:

$$|g(x) - g(y)| = +\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |g_k(x) - g_k(y)|^2} \le$$

$$\le n^{\frac{3}{2}} K|x - y| \le n^2 K|x - y|.$$

Теперь сформулируем для системы (1) теорему существования и единственности решения.

Теорема 3. (о существовании и единственности решения).

Пусть: 1. Задана система (1) и правые части (1) определены на некотором открытом множестве $\mathfrak{D}$.

2. Функции $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\frac{\partial f_k(t,x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_m}$ $(k = 1,2, \dots, n; m = 1,2, \dots, n)$ *непрерывны на этом множестве.*

Тогда: 1. Для любой точки $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ *множества* $\mathcal{D}$ *существует решение*

$$x_k = \varphi_k(t)(k = 1,2, \dots, n)$$

системы (1) удовлетворяющее условиям:

$$\varphi_k(t_0) = x_{k0};\ k = 1,2, \dots, n \qquad (7)$$

определенное на некотором интервале, содержащем точку t_0.

2. Если два решения

$$x_k = \varphi_k(t), x_k = \psi_k(t), k = 1,2, \dots, n$$

системы (1) удовлетворяющих условиям

$$\varphi_k(t_0) = \psi_k(t_0), k = 1,2, \dots, n,$$

то, эти решения совпадают на интервале, где они оба определены.

Доказательство данной теоремы проводится, как и доказательство теоремы 1, только с незначительными изменениями.

Пусть задана система (1) и требуется доказать существование решения $x_k = \varphi_k(t)$ удовлетворяющее условиям (7).

Пусть $x = \varphi(t)$ – некоторое решение системы (3) $\big((1)\big)$, так что выполнено тождество

$$\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big) \qquad (8)$$

и пусть

$$\varphi(t_0) = x_0, x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}). \qquad (9)$$

Тогда совокупность соотношений (8), (9) эквивалентно одному соотношению

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)d\tau. \tag{10}$$

Истинность этого предложения доказывается, как и в теореме 1.

Так как точка (t_0, x_0) принадлежит открытому множеству $\mathcal{D}$, то существует множество

$\Pi = \{(t,x), |t - t_0| \leq q, |x - x_0| \leq a\}$, где q и a – некоторые положительные числа и $\Pi \subset \mathcal{D}$. Множество Π замкнутое и ограниченное, то непрерывные функции

$$|f(t,x)|, \left|\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m}\right|, k, m = 1,2, \dots, n.$$

ограничены на нем, т.е.

$$|f(t,x)| \leq M, \left|\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m}\right| \leq K. \tag{11}$$

Наряду с множеством Π рассмотрим множество

$$\Pi_r = \{(t,x), |t - t_0| \leq r \leq q, |x - x_0| \leq a\} \subset \Pi.$$

Построим последовательность векторных функций

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots \tag{12}$$

определенных на отрезке $|t - t_0| \leq\ r$.

Вектор функции $\varphi_k(t)$ определим так

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x_k(\tau)\big)d\tau. \tag{13}$$

Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных функций графики, которых проходят в Π_r, т.е. если $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r$, то для $|t - t_0| \leq\ r$ должно быть

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leq a.$$

Определим, при каких условиях $\forall k\ (\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r)$.

Пусть $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r$. Определим $\varphi_{k+1}(t)$ по формуле (13).

Имеем

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left| f\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big) \right| d\tau \right| (\text{усл}. 11) \leq$$

$$\leq M|t - t_0| \leq M \cdot r.$$

Отсюда вытекает, если $M \cdot r \leq a$ или

$$r \leq \frac{M}{a}, \qquad (14)$$

то

$$\varphi_{k+1}(t) \epsilon \Omega_r.$$

Докажем равномерную сходимость последовательности (12).

Имеем

$$|\varphi_1 - \varphi_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)| d\tau \right| \leq$$

$$\leq \; M|t - t_0| \leq M \cdot r \leq a,$$

$$|\varphi_1 - \varphi_0| \leq a.$$

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \big(f(\tau, x_1) - f(\tau, x_0)\big) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_1) - f(\tau, x_0)| d\tau \right| (\text{неравенство } 6) \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} n^2 K|\varphi_1 - x_0|d\tau \leq n^2 K\,|t - t_0|a \leq n^2 K\,ra.$$

Потребуем выполнимость условия

$$n^2 K\,r \leq q_0 < 1.$$

Тогда

$$r \leq \frac{q_0}{n^2 K} \tag{15}$$

и $|\varphi_2 - \varphi_1| \leq q_0 a$.

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \big(f(\tau, \varphi_2) - f(\tau, \varphi_1)\big)d\tau\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi_2 - \varphi_1|d\tau\right| \leq$$

$$\leq n^2 K\left|\int_{t_0}^{t} |\varphi_2 - \varphi_1|d\tau\right| \leq q_0 a n^2 K|t - t_0| \leq q_0 a n^2 K r \leq q_0^2 a,$$

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \leq q_0^2 a.$$

Продолжая процесс, получим

$$\forall k \epsilon N\big(|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq q_0^k a\big) \tag{16}$$

Таким образом, в силу (16), последовательность функций (12) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции$\varphi(t)$, принадлежащей семейству Ω_r.

Покажем, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (10). В (13) переходя к пределу получим

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)d\tau.$$

Итак, существование решения $x = \varphi(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию (9) доказана. Решение $x = \varphi(t)$ определена на интервале $|t - t_0| \leq\ r$, где r - произвольное число, удовлетворяющее неравенствам (14) и (15).

Единственность решения докажем методом от противного.

Пусть существует решения $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ удовлетворяющие условию $x_0 = \varphi(t_0)$, $x_0 = \psi(t_0)$ и определенные на интервале $|t - t_0| \leq r$.

Поскольку $\varphi(t), \psi(t)$ являются решениями уравнения (3), то согласно первой части теоремы $\varphi(t) \epsilon \Omega_r, \psi(t) \epsilon \Omega_r$.

Тогда, имеем

$$max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left|\left(f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau)\right)\right| d\tau \right| \leq$$

$$\leq n^2 K \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \right| \leq$$

$$\leq n^2 K |t - t_0| \cdot max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq$$

$$\leq n^2 Kr \cdot max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq q_0 max|\varphi(t) - \psi(t)|,$$

$$max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq q_0 max|\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Это соотношение $\forall t \; (|t - t_0| \leq r)$ возможна, только при условии $|\varphi(t) - \psi(t)| = 0$, т.е. когда $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают на отрезке $|t - t_0| \leq r$. Теорема доказана.

НОРМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Система дифференциальных уравнений вида

$$x'_k = \sum_{m=1}^{n} a_{mk}(t) x_m + b_k(t), k = 1,2, \dots, n \qquad (1)$$

называется нормальной линейной системой.

Пусть требуется найти решение $x_k = \varphi_k(t)$ системы (1) удовлетворяющее условиям

$$x_{k0} = \varphi_k(t_0). \qquad (2)$$

Поставленная задача решается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть функции* $a_{mk}(t)$, $b_k(t)$, $m,k = 1,2,\dots,n$ *являются непрерывными функциями на некотором отрезке* $r_1 \le t \le r_2$. *Тогда для любых начальных значений*

$$t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0};$$

$$r_1 < t_0 < r_2.$$

существует решение системы (1) с этими начальными значениями, определенное на всем отрезке $r_1 \le t \le r_2$.

Доказательство. Систему (1) и начальные условия (2) в векторной форме запишем в виде

$$x = A(t)x + b(t), \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A(t) = \big(a_{mk}(t)\big)$ – матрица $n \times n$,

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

$$b(t) = \big(b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)\big).$$

Введя обозначение

$$f(t,x) \equiv A(t)x + b(t)$$

соотношения (3) – (4) заменим соотношением

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x)\, d\tau \tag{5}$$

(при этом мы считаем, что $x(t)$ – решение системы (3), удовлетворяющее условию (4)).

Как и в теореме 3 определим последовательность функций

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots \tag{6}$$

при этом полагаем

$$x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_k)\, d\tau. \tag{7}$$

Для правых частей уравнения (1) имеем

$$\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m} = a_{mk}(t)$$

и потому на всем отрезке $r_1 \le t \le r_2$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m}\right| \le K, k, m = 1,2, \dots, n,$$

где K - некоторое положительное число.

Так как, функции $x_0(t)$, $x_1(t)$ ограничены на отрезке, то на этом отрезке имеет место неравенство

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le C - \text{const}.$$

Далее, на этом же отрезке, получаем

$$|x_2(t) - x_1(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} |(f(\tau, x_1) - f(\tau, x_0)| d\tau\right| \le$$

$$\le n^2 KC|t - t_0|;$$

$$|x_3(t) - x_2(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} |(f(\tau, x_2) - f(\tau, x_1)| d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{(n^2K)^2 C}{2!} |t - t_0|^2;$$

....

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le \frac{(n^2K)^{k-1} C}{(k-1)!} |t - t_0|^{k-1}.$$

Отсюда получаем

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le C \frac{\left(n^2 K(r_2 - r_1)\right)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(n^2 K(r_2-r_1)\right)^{k-1}}{(k-1)!}$ сходится, тогда последовательность (6) на отрезке $r_1 \le t \le r_2$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $x(t)$.

Для этой функции имеем

$$\left|\int_{t_0}^{t} \left(f\left(\tau, x_k(\tau)\right) - f\left(\tau, x(\tau)\right) d\tau\right| \le$$

$$\le \max_{r_1 \le t \le r_2} \left| \int_{t_0}^{t} \left|\left(f\left(\tau, x_k(\tau)\right) - f\left(\tau, x(\tau)\right)\right| d\tau \right| \le$$

$$\le n^2 K(r_2 - r_1)|x_k - x|.$$

Таким образом, последовательность функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots$ на отрезке $r_1 \le t \le r_2$ равномерно сходится к функции

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Переходя к пределу в соотношении (7), получаем

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Теорема 4 доказана.

Если в (1) все $b_k(t) \equiv 0$ $(k = 1,2, \dots, n)$, то система

$$y_k'(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km}(t) y_m(t) \tag{8}$$

называется однородной, а система (1) неоднородной

$(b_k(t) \not\equiv 0)$.

В векторной форме систему (8) можно записать в виде

$$y' = A(t)y(t). \tag{9}$$

Установим следующие простейшие свойства уравнения (9).

1^0. Если $y = \varphi(t)$ является решением уравнения (9), определенное при $r_1 \le t \le r_2$ и $\varphi(t_0) = 0, r_1 < t < r_2$, то $\varphi(t) \equiv 0$ на всем отрезке $r_1 \le t \le r_2$.

2^0. Если $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – решения уравнения (9), то функция

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t),$$

также является решением уравнения (9), где $c_1, c_2, \dots, c_n$ – $const$.

Доказательство.

1^0. Вектор $x(t) \equiv 0$ является решением (9). Тогда, согласно теореме 4, решение $\varphi(t)$ имеющая начальное условие $\varphi(t_0) = 0$ и решение $x(t) \equiv 0$ должны совпадать на всем отрезке $r_1 \le t \le r_2$.

2^0. Проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (9).

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ

Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{10}$$

система решений уравнения (9).

Если существуют такие константы $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}$, не обращающиеся одновременно в нуль, что

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0, \tag{11}$$

то система (10) называется линейно зависимой.

Если тождество (11) выполняется только при одновременном

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0,$$

то система (10) называется линейно независимой.

Если система (10) линейно зависима, то в (11) существует хотя бы одно $c_m \neq 0$.

Оказывается, что если хотя бы для одного значения $t = t_0$ векторы

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0) \tag{12}$$

линейно зависимы, то решения (10) линейно зависимы.

А. Таким образом, если векторы (10) линейно независимы, то ни при каком значении t векторы (10) не могут быть линейно зависимыми.

Докажем это. Пусть векторы (12) линейно зависимы, т.е. что

$$c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0) = 0,$$

где не все числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ равны нулю. Положим

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t).$$

В силу свойства 2^0 функция $\varphi(t)$ является решением уравнения (9). Еще $\varphi(t_0) = 0$, тогда согласно свойству $1^0, \varphi(t) \equiv 0$.

Система функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ линейно зависима.

Если система функций

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{13}$$

решений уравнения (9) линейно независима, то оно называется фундаментальной системой решений.

Справедливы:

1. Для уравнения (9) всегда существует фундаментальная система решений.

2. Если (13) фундаментальная система решений, то каждое решение $\varphi(t)$ уравнения (9) представима в виде

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \quad (14)$$

Докажем это предложение.

1. Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

произвольная система постоянных линейно независимых векторов. Определим решения (13) с начальными условиями

$$\varphi_k(t_0) = a_k, k = 1, \dots, n.$$

Векторы $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ по предположению, линейно независимы, тогда согласно предложению **А** решения (13), также линейно независимы, т.е. составляют фундаментальную систему.

2. Пусть $\varphi(t)$ произвольное решение уравнения (9), а (13) фундаментальная система решений.

Возьмем значение $t = t_0$ и определим

$$\varphi(t_0), \varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0).$$

Система (13) фундаментальная система решений, то векторы

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$$

линейно независимы и составляют базис рассматриваемого пространства (число векторов и равномерность пространства совпадают). Тогда любой вектор $\varphi(t_0)$ из этого пространства через базис выражается так

$$\varphi(t_0) = c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ надлежащим образом выбранные постоянные. Решения $\varphi(t)$ и $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$ имеют общее начальное условие и потому совпадают, т.е. справедливо (14).

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА

Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{15}$$

некоторая система решений уравнения (9).

Решение $\varphi_k(t)$ запишем в координатной форме

$$\varphi_k(t) = \left(\varphi_{k1}(t), \varphi_{k2}(t), \dots, \varphi_{kn}(t)\right).$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t)\varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{n1}(t) \\ \varphi_{12}(t)\varphi_{22}(t) & \dots & \varphi_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi_{1n}(t)\varphi_{2n}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

k -м столбцом этой матрицы служит решение $\varphi_k(t)$. Координаты $\varphi_k(t)$ являются решением системы (8). Определитель этой матрицы обозначим через $W(t)$. $W(t)$ – называется определителем Вронского.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если решения (15) линейно независимы, то определитель Вронского $W(t)$ не обращается в нуль ни при одном значении t. В этом случае система (15) является фундаментальной системой решений.
2. Если система (15) линейно зависима, то определитель Вронского тождественна равна нулю.
3. В случае, когда система (15) является фундаментальной системой решений, (16) назовем фундаментальной матрицей. Произвольная квадратная матрица порядка n , составленная из функций переменного t и удовлетворяющая некоторым условиям, является фундаментальной для некоторой системы уравнений вида (8).

Докажем предложения 1-3. Справедливость утверждений 1-2 очевидна. Докажем 3. Пусть (16) есть произвольно заданная матрица функций переменных t .

Функции непрерывно дифференцируемы на интервале $r_1 < t < r_2$. $\forall\, t \epsilon (r_1, r_2)$ $(W(t) \neq 0)$. Предположим, что векторная функция $\varphi_k(t)$, координаты которой составляют k – столбец матрицы (16), является решением уравнения (9).

Имеем

$$\varphi'_{kj}(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{mj}(t) \cdot \varphi_{km}(t),\ j, k = 1,2, \dots, n. \quad (17)$$

Если в (17) зафиксировать индекс j и считать меняющимся только k, то систему полученных соотношений можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестны $a_{mj}(t)$ $(j, m = 1,2, \dots, n)$

Эта система однозначно разрешима, так как матрица ее получается из матрицы (16) транспонированием и потому определитель отличен от нуля. Таким образом, функции $a_{mj}(t)$ однозначно определяются через непрерывные функции $\varphi'_{kj}(t),\ \varphi_{kj}(t)$.

ФОРМУЛА ЛИУВИЛЛЯ

Правило дифференцирования определителя

Пусть $(\varphi_{km}(t))$ – квадратная матрица порядка n, при этом функции $\varphi_{km}(t)$ являются дифференцируемыми. Определитель этой матрицы обозначим $W(t)$.

Производная $W'(t)$ этого определителя вычисляется по следующей формуле:

$$W'(t) = W_1(t) + \ldots + W_n(t). \quad (18)$$

Слагаемое $W_m(t)$ $(k = 1,2, \dots, n)$ определяется следующим образом: в матрице $(\varphi_{km}(t))$ дифференцируют по t все члены m – й строки, а остальные строки оставляют без изменения. Очевидно, что роли строк и столбцов можно поменять.

Пусть $W(t)$ – определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (8), тогда справедлива формула

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} s(\tau)d\tau}, \tag{19}$$

где $s(t)$ - след матрицы $A(t)$:

$$s(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t).$$

(19) называется формулой Лиувилля.

НЕОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задана неоднородная система линейных уравнений

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t). \tag{1}$$

Рассмотрим однородное уравнение соответствующее (1)

$$y'(t) = A(t)y(t)) \tag{2}$$

Пусть $y = \varphi(t)$ – произвольное решение уравнения (2) и $x^* = \psi(t)$ – некоторое решение уравнения (1), тогда произвольное решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$x = \varphi(t) + \psi(t). \tag{3}$$

Истинность этого предложения проверяется непосредственной подстановкой (3) в (1).

Теперь ознакомимся методом нахождения решений уравнения (1). Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{4}$$

фундаментальная система решений однородного уравнения (2). Решение (1) будем искать в виде

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n(t)\varphi_n(t), \quad (5)$$

где $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ – являются неизвестными функциями от t.

Подставляя (5) в уравнение (1), получаем:

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n'(t)\varphi_n(t) + c_1(t)\varphi'(t) + \ldots +$$
$$+c_n(t)\varphi_n'(t) =$$
$$= A(t)\big(c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n(t)\varphi_n(t)\big) + b(t).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ – решения уравнения (2), получаем:

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n'(t)\varphi_n(t) = b(t) \quad (6)$$

Уравнение (6) относительно $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$, записанное в координатной форме, имеет вид

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi_{mk}(t) \cdot c_m'(t) = b_k(t), k = 1,2, \ldots, n. \quad (7)$$

Пусть $\Phi(t) = \big(\varphi_{mk}(t)\big)$ фундаментальная матрица уравнения (2). Тогда соотношение (7) можно записать в виде

$$\Phi(t) \cdot c'(t) = b(t).$$

Отсюда находим:

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$$

или

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(t)b(t)\,dt, \quad (8)$$

где $\Phi^{-1}(t)$ – матрица, обратная матрице $\Phi(t)$.

Формулу (5) можно переписать в виде

$$x_k(t) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_{mk}(t) \cdot c_m(t), \; k = 1,2, \ldots, n,$$

или в векторной форме

$$x = \Phi(t)c(t) \tag{9}$$

(8) подставляя в (9), получаем:

$$x = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)b(t)dt. \tag{10}$$

Таким образом, формула (10) дает общее решение уравнения (1). Решение неоднородного уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 записывается в виде

$$x = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right). \tag{11}$$

При $t = t_0$ имеем $x(t_0) = x_0$. Подстановкой (11) в (1) убеждаемся, что (11) является решением (1).

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ n - ГО ПОРЯДКА

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)y(t) = b(t) \tag{1}$$

называется линейным уравнением n-порядка. Относительно функций $a_1(t), \ldots, a_n(t), b(t)$ будем предполагать, что они определены и непрерывны на интервале $r_1 < t < r_2$.

Если $b(t) \equiv 0$, то получим уравнение

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)z(t) = 0 \tag{2}$$

Уравнение (2) называется однородным уравнением, уравнения (1). Уравнение (1) называется неоднородным.

Уравнение (1) можно свести к нормальной линейной системе. Для этого введем новые неизвестные функции

$$x_1 = y, x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)}.$$

Тогда эти новые неизвестные функции $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют линейной системе

$$
\begin{cases}
x_1' = x_2, \\
x_2' = x_3, \\
\dots\dots\dots\dots \\
x_{n-1}' = x_n \\
x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \ \dots - a_1(t)x_n + b(t)
\end{cases}
$$

Полученную систему в векторной форме можно записать в виде

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$A(t) =$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
-a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t)
\end{pmatrix},
$$

$$b(t) = (0, 0, \dots, b(t))$$

Таким образом, исследование уравнения (1) можно свести к исследованию нормальной линейной системы (3).

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнения вида

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)}(t) + \ ... a_{n-1}z' + a_n z^n = f(t), \qquad (1)$$

называются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами n-порядка, где $z(t)$ – неизвестная функция, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – постоянные числа, $f(t)$ – заданная функция;

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, а в противном случае неоднородным.

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть задано уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ ... a_{n-1}z' + a_n z = 0 \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$z = e^{\lambda t}, \qquad (3)$$

где λ - некоторое число (вещественное или комплексное).

(3) подставляя в (2), имеем

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \ ... + a_{n-1}\lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = 0,$$

или

$$e^{\lambda t} \cdot (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ ... + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

$\forall t \epsilon (-\infty, \infty)(e^{\lambda t} \neq 0)$, тогда должно быть

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4)$$

Многочлен, в левой части (4) относительно λ, называется характеристическим многочленом уравнения (2), а (4) характеристическим уравнением. Обозначим $L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ ... + a_{n-1}\lambda + a_n$. Из курса алгебры известно, что уравнение (4) имеет ровно n корней, считая их кратности.

Сначала рассмотрим случай, когда уравнение (4) имеет n различных корней, т.е. не имеет кратных корней. Для этого случая совокупность всех решений уравнения (2) описывается следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть характеристический многочлен* $L(\lambda)$ *имеет* n *различных корней*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Тогда общее решение уравнения (2) *можно представить в виде*

$$z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \tag{5}$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ - произвольные постоянные.

Доказательство. (5) является решением уравнения (2) проверяется непосредственной подстановкой (5) в уравнение (2).

Докажем, если z_* - некоторое решение уравнения (2), то при надлежащем выборе чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ из (5) можно получить z_*. В этом смысле (5) будет общим решением уравнения (2).

Пусть z_* определена при $-\infty < t < +\infty$ и

$$z_*(0) = z_0, z_*'(0) = z_0', \dots, z_*^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

Покажем теперь, что константы $c_1, c_2, \dots, c_n$ можно подобрать так, чтобы и решение $z(t)$ определяемое, формулой (5), удовлетворяло тем же начальным условиям.

$$z(0) = z_0,\ z'(0) = z_0', \dots, z^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}. \tag{6}$$

Из (5) учитывая (6) получаем:

$$c_1 \lambda_1^m + c_2 \lambda_2^m + \dots + c_n \lambda_n^m = z_0^{(m)}, \tag{7}$$

$$m = 0,1,2, \dots, n-1.$$

Соотношение (7) представляет собой систему из n уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы (определитель Вандермонда) отличен от нуля, так как все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно различны. Тогда из системы (10), однозначно определяются постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$. Таким образом, определяется решение $z(t)$ удовлетворяющее условиям (7). Решения z_* и z удовлетворяют одним и тем же начальным условиям, тогда они совпадают. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда характеристический многочлен $L(\lambda)$ имеет кратные корни.

Теорема 6. *Пусть* $L(\lambda)$ *имеет попарно различные корни* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ $(m < n)$, *причем корень* λ_j $(j = 1,2, \dots, m)$ *имеет кратность* k_j, *так что*

$$k_1 + k_1 + \ldots + k_m = n.$$

Тогда все функции

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = te^{\lambda_1 t}, \dots, z_{k_1} = t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \\ z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 t}, z_{k_1+2} = te^{\lambda_2 t}, \dots, z_{k_1+k_2} = t^{k_2 - 1} e^{\lambda_2 t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} = e^{\lambda_m t}, z_{k_1+\dots+k_{m-1}+2} = te^{\lambda_m t}, \dots, z_n = t^{k_m - 1} e^{\lambda_m t} \end{cases} \quad (8)$$

являются решениями уравнения (2). Общее решение уравнения (2) представляется в виде

$$z = c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n, \quad (9)$$

где, $c_1, c_2, \dots, c_n$ *– произвольные постоянные.*

Из теоремы 6 вытекает, что общее решение также можно записать в виде

$$z = f_1(t) e^{\lambda_1 t} + f_2(t) e^{\lambda_2 t} + \ \dots + f_m(t) e^{\lambda_m t}, \quad (10)$$

где $f_j(t)$ есть многочлен степени, не превосходящей чисел $k_j - 1, j = 1,2, \dots, n$. При этом коэффициентами многочленов $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ являются постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Действительно, нетрудно проверить, каждая функция из системы (8) является решением уравнения (2).

Тогда их линейная комбинация, которая представлена соотношением (9) также является решением уравнения (2). Из (9) вытекает справедливость высказанного утверждения.

<u>Примеры</u>.

1. $z^V + 3z^{IV} + z^{III} + z^{II} = 0$.

Характеристический многочлен данного уравнения имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = \\ = \lambda^2(\lambda + 1)^3.$$

Корнями этого многочлена являются числа

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1,$$

которые, соответственно имеют кратности $k_1 = 2, k_2 = 3$.

В силу теоремы 6 система решений (8) имеет вид:

$$z_1 = 1, z_2 = t, z_3 = e^{-t}, z_4 = te^{-t}, z_5 = t^2e^{-t}.$$

Общее решение можно представить в виде:

$$z = (c_1 + c_2t) + (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^{-t}.$$

2. Решим уравнение $z^V + 2z^{III} + z^I = 0$.

Характеристический многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda(\lambda^2 + 1)^2$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$ (простой) $\lambda_2 = i$ (двухкратный), $\lambda_3 = -i$ (двухкратный).

Система (8) имеет вид

$$z_1 = 1, z_2 = e^{it}, z_3 = te^{it}, z_4 = e^{-it}, z_5 = te^{-it},$$

а общее решение можно записать в виде:

$$z = c_1 + (c_2 + tc_3)e^{it} + (c_4 + tc_5)e^{-it}.$$

3. Рассмотрим уравнение $z^{III} - 5z^{II} + 6z^I = 0$.

Характеристический многочлен имеет вид:

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Корнями многочлена будут числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ корни различные. Тогда, согласно теореме 5, общее решение представляется в виде

$$z = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}.$$

4. Для дифференциального уравнения
$z^{III} + 3z^{II} + 9z^{I} - 13z = 0$ характеристический многочлен имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = \lambda^3 - 1 + 3\lambda^2 - 3 + 9\lambda - 9 =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) + 3(\lambda^2 - 1) + 9(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1 + +3\lambda + 3 + 9) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 13).$$

Корнями характеристического многочлена будут числа $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$.

Общее решение, согласно теореме 5, представима в виде

$$z = c_1 e^{t} + c_2 e^{(-2+3i)t} + c_3 e^{-(2+3i)t}.$$

5. $z^{III} - z = 0.$

Характеристический многочлен имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 1 = 0.$$

Корнями будут числа $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Тогда общее решение имеет вид

$$z = c_1 e^{t} + c_2 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t} + c_3 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}.$$

В заключении отметим:

Если характеристический многочлен $L(\lambda)$ имеет различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то система функций

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = e^{\lambda_2 t}, \dots, z_n = e^{\lambda_n t} \tag{11}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (2); если характеристический многочлен $L(\lambda)$ имеет корни $\lambda_1 - k_1$-кратное, $\lambda_2 - k_2$-кратное, $\lambda_m - k_m$-кратное ($k_1 + k_2 +$

$\ldots + k_m = n$), то система функций (8) образуют фундаментальную систему решений.

Для доказательства этого предложения составим определитель Вронского системы (11) (случай различных корней)

$$W(t) = \begin{vmatrix} z_1 & \ldots & z_n \\ z_1' & \ldots & z_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n^{n-1} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t}.$$

$\forall t \epsilon (-\infty, +\infty)(W(t) \neq 0)$. Следовательно, система (11) линейно независима и образует фундаментальную систему решений.

Второй случай доказывается также.

НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим уравнение (1).

Нетрудно проверить (непосредственной подстановкой): для нахождения общего решения достаточно найти $z_{\text{оо}}$ – общее решение однородного уравнения и $z_{\text{чн}}$ – частное решение неоднородного уравнения и сложить эти решения, т.е.

$$z_{\text{он}} = z_{00} + z_{\text{чо}}.$$

Общее решение однородного уравнения определяются теоремами 5, 6. Остается найти частное решение неоднородного уравнения. Для нахождения частного решения уравнения (1) рассмотрим следующие случаи:

1. $f(t) = \mathcal{P}(t)$, где $\mathcal{P}(t)$ – многочлен (полином) от t.

Если число 0 (ноль) не является корнем характеристического многочлена $L(\lambda)$, то частное решение неоднородного уравнения можно найти в виде

$$z_{\text{чн}} = Q(t),$$

где $Q(t)$ – многочлен той же степени, что и $\mathcal{P}(t)$, но с неопределенными коэффициентами.
Если же O есть корень характеристического многочлена кратности K, то

$$z_{\text{чн}} = t^k Q(t),$$

$Q(t)$ имеет тот же степень, что и $\mathcal{P}(t)$.

Для определения коэффициентов многочлена Q(t) используется метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим следующий пример: пусть задано уравнение

$$z^{II} - 2z^{I} - 3z = 3t^2 + 1$$

характеристический многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

имеет корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

Частное решение уравнения будем искать в виде

$$z_{\text{чн}} = at^2 + bt + c,$$

где a, b, c – некоторые числа.

Для определения чисел a, b, c функцию $z_{\text{чн}}$ представляем в заданное уравнение:

$$z'_{\text{чн}} = 2at + b, z''_{\text{чн}} = 2a.$$

Имеем

$$2a - 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) = 3t^2 + 1.$$

Отсюда, используя равенство многочленов, имеем

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ -4a - 3b = 0 \\ \ \ 2a - 2b - 3c = 1 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{4}{3} \\ c = -\dfrac{17}{9} \end{cases}$$

Частное решение $z_{\text{чн}}$ и общее решение $z_{\text{оо}}$ имеют вид

$$z_{\text{чн}} = -t^2 + \tfrac{4}{3}t - \tfrac{17}{9},$$

$$z_{\text{оо}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}.$$

Общее решение можно записать так

$$z_{\text{он}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \left(-t^2 + \tfrac{4}{3}t - \tfrac{17}{9}\right).$$

2. $f(t) = \mathcal{P}(t)e^{at}$.

Если число a не является корнем характеристического многочлена, то

$$z_{\text{чн}} = Q(t)e^{at}.$$

Если a – k-кратный корень, то

$$z_{\text{чн}} = t^k Q(t)e^{at}.$$

В рассматриваемом случае $Q(t)$ – неизвестный многочлен той же степени, что и $\mathcal{P}(t)$. В обеих случаях решения $z_{\text{чн}}$ подставляя в (1), определяем коэффициенты многочлена $Q(t)$.

3. $f(t) = e^{ax}(\mathcal{P}_1(t)cosbt + \mathcal{P}_2(t)sinbt)$,

где $\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t)$ – многочлены от t. Пусть m – наивысшая из степеней полиномов $\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t)$. Тогда, если число $a + ib$ не является корнем характеристического многочлена, то

$$z_{\text{чн}} = e^{at}(Q_1(t)cosbt + Q_2(t)sinbt),$$

где $Q_1(t), Q_2(t)$ – многочлены степени m.

Если $a + ib$ корень характеристического многочлена кратности k, то

$$z_{\text{чн}} = t^k e^{at}(Q_1(t)cosbt + Q_2(t)sinbt)$$

4. Если $f(t)$ представима в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_m(t),$$

где $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ некоторые функции (возможно, вида рассмотренных 1-3).

Если $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_m(t)$ частные решения уравнения (1), соответствующие функциям

$$f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$$

$$\left(z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = f_j(t), j = 1,2, \ldots, m\right),$$

то

$$z_{\text{он}} = z_1(t) + z_2(t) + \ldots + z_m(t).$$

<u>Примеры</u>.

1. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$z^{II} - z^{I} = e^t + t.$$

Соответствующее однородное уравнение будет

$$z^{II} - z^{I} = 0.$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 1 = \lambda(\lambda - 1).$$

Корнями многочлена являются числа $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$

Общее решение однородного уравнения можно представить так

$$z_{00} = c_1 + c_2 e^t.$$

Теперь найдем частное решение $z_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения. Правая часть неоднородного уравнения представлена в виде суммы двух функций, т.е.

$$f(t) = e^t + t.$$

Частное решение найдем согласно случаю 4. Для этого рассмотрим уравнения

$$z^{II} - z^{I} = e^{t},\ z^{II} - z^{I} = t.$$

Так как число 1 является корнем характеристического многочлена, то частное решение $z_1(t)$ будем искать в виде $z_1 = Ate^{t}$, где A – некоторая постоянная. Подставляя

$$z_1' \ = Ae^{t} + Ate^{t},$$

$$z_1'' \ = Ae^{t} + Ae^{t} + Ate^{t} = 2Ae^{t} + Ate^{t}$$

в первое уравнение получим

$$2Ae^{t} + Ate^{t} - Ae^{t} - Ate^{t} = e^{t}.$$

Отсюда

$$Ae^{t} = e^{t}$$

или $A = 1$. Таким образом, частным решением первого уравнения будет функция

$$z_1(t) = \ te^{t}.$$

Число $\lambda_1 = 0$ является корнем характеристического многочлена. Тогда, согласно случая 1, частное решение будем искать в виде

$$z_2(t) = t(At + B).$$

Найдем числа A и B. Для этого найдем

$$z_2' = 2At + B, z_2'' = 2A$$

Найденные функции, подставляя во второе уравнение, получим

$$2A - 2At - B = t.$$

Отсюда имеем уравнения для определения A и B

$$\begin{cases} -2A = 1, \\ 2A - B = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$A = -\frac{1}{2},$$

$$B = -1.$$

Тогда

$$z_2 = -t\left(\frac{1}{2}t + 1\right) = -\frac{1}{2}t^2 - t.$$

Согласно 4, общее решение заданного уравнения можно записать в виде

$$z_{0\text{н}} = c_1 + c_2e^t + te^t - \frac{1}{2}t^2 - t.$$

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m + f_k(t), \quad k = 1,2,\dots,n. \qquad (1)$$

называется линейной неоднородной системой с постоянными коэффициентами, где x_m – неизвестная функция, a_{km} – постоянные числа, $f_k(t)$ – заданные функции;

Если в (1) все $f_k(t) \equiv 0$ имеем

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{m=1}^{n} a_{km}y_m, k = 1,2,\dots,n \qquad (2)$$

Система (2) называется однородной системой соответствующее (1).

Общее решение системы (1) находят по следующему правилу: находят общее решение системы (2), затем находят какое-либо частное решение системы (1). Сумма двух решений будет общим решением системы (1).

Системы (1) и (2) в векторной форме записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $A = (a_{mk})$ $(k, m = 1,2, \dots, n)$, $f(t) = \big(f_1(t),\ f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$.

Общее решение системы (4) обозначим $y_{об}$, а частное решение системы (3) обозначим $x_ч$. Тогда общее решение $x_{об}$ системы (3)можно записать в виде

$$x_{об} = y_{об} + x_ч. \tag{5}$$

Найдем общее решение $y_{об}$.

Если для некоторого числа λ и некоторого вектора h выполняется соотношение

$$A \cdot \eta = \lambda\eta \tag{6}$$

то число λ называется собственным значением, а вектор η собственным вектором матрицы A.

П$_1$. *Пусть матрица* A *имеет собственное число* λ *и собственный вектор* η. *Тогда векторная функция*

$$y = \eta e^{\lambda t} \tag{7}$$

является решением уравнения (4).

Действительно, (7) подставляя в (4) получим

$$\lambda\eta e^{\lambda t} = A \cdot \eta e^{\lambda t}.$$

Отсюда имеем

$$A \cdot \eta = \lambda\eta.$$

Истинность сказанного доказана. Из соотношения (6) получим

$$(A - \lambda E)\eta = 0, \tag{8}$$

где E - единичная матрица порядка n.

Если в (8) η ненулевой вектор, то должна быть

$$det|A - \lambda E| = 0 \tag{9}$$

т. е. определитель матрицы $(A - \lambda E)$ должен равняться нулю.

Левая часть (9), определяет некоторый многочлен степени n относительно λ.

Уравнение (9) называется характеристическим уравнением системы (4), а многочлен характеристическим многочленом (сравните с линейным уравнением n - го порядка с постоянными коэффициентами).

Если известно значение $\lambda = \lambda_j$, то это значение подставляя в (9), можно определить ненулевой вектор h соответствующий λ_j.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Корни уравнения (9) различны. Справедлива теорема.

Теорема 7. *Пусть матрица имеет* n *различных собственных значений:* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *и* $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ *– соответствующие собственные векторы матрицы A. Положим*

$y_j = \eta_j e^{\lambda_j t}, j = 1,2, \dots, n$ ($y_j -$ векторная функция).

Тогда, векторная функция

$$y_{об} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ \dots + c_n y_n. \tag{10}$$

является общим решением системы (4).

Доказательство. (10) является решением системы (4), проверяется непосредственной подстановкой. При этом надо учесть предложение Π_1. Докажем, что (10) общее решение системы (4). Это означает, что, если $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (4), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$, то надлежащим образом, определив постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$ решение $\varphi(t)$ можно представить в виде

$$\varphi(t) \ = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ \dots + c_n y_n. \tag{11}$$

Нам осталось показать возможность выбора чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$. Решение $\varphi(t)$ можно считать определенным на всей прямой $-\infty < t < +\infty$. Не ограничивая общности можно взять $t_0 = 0$.

В (11) возьмем $t = 0$. Тогда

$$\varphi(0) = x_0 = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_n\eta_n.$$

Мы получили разложение вектора x_0 по базису $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ (векторы $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ образуют базис).

В (10), полагая $t = 0$, получим

$$x(0) = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_n\eta_n$$

При одних и тех же значениях $c_1, c_2, \dots, c_n$ начальные значения решений $\varphi(t)$ и $x(t)$ при $t = 0$ совпадают, тогда, согласно теореме 4, эти решения совпадают на всем интервале определения. Теорема доказана.

2. Уравнение (9) имеет кратные корни, т. е. матрица A имеет кратные собственные значения. Пусть λ – есть k кратный корень. Тогда собственному значению λ соответствует серия собственных векторов

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n.$$

Для матрицы A выполняются соотношения

$$A\eta_1 = \lambda\eta_1,\ A\eta_2 = \lambda\eta_2 + \eta_1, \dots, A\eta_k = \lambda\eta_k + \eta_{k-1}.$$

Определим последовательность векторных функций

$$\omega_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_2 + \dots + \eta_r,\ r = 1,2, \dots, k. \quad (12)$$

Тогда векторные функции

$$y_r = \omega_r(t)e^{\lambda t}, r = 1,2, \dots, k. \quad (13)$$

являются решениями уравнения (4), причем

$$y_r(0) = \eta_r.$$

Таким образом, каждой серии из k векторов соответствует система из k решений.

Π_2. *Докажем, что система функций (13) является решением системы (4). Сначала докажем справедливость следующих соотношений*

$$\omega_r'(t) = \omega_{r-1}(t), \tag{14}$$

$$A\omega_r(t) = r\omega_r(t) + \omega_{r-1}(t). \tag{15}$$

Продифференцировав (12), получим первое соотношение. Далее

$$A\omega_r(t) = A\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_2 + \ldots + \eta_r\right) =$$

$$= \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\lambda\eta_1 +$$

$$+ \ldots + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}(\lambda\eta_2 + \eta_1) + \lambda\eta_r + \eta_{r-1} = \lambda\omega_r(t) + \omega_{r-1}(t)$$

Второе соотношение также доказана.

(13) подставляя в (4), имеем

$$y_r'(t) = \left(\omega_r(t)e^{\lambda t}\right)' = \omega_r{}'(t)e^{\lambda t} + \lambda\omega_r(t)e^{\lambda t}.$$

Отсюда, учитывая соотношения (14), (15) получим

$$y_r'(t) = \omega_{r-1}(t)e^{\lambda t} + \lambda\omega_r(t)e^{\lambda t} = \left(\omega_{r-1}(t) + \lambda\omega_r(t)\right)e^{\lambda t} =$$

$$= A\omega_r(t)e^{\lambda t} = Ay_r(t),$$

$$y_r'(t) = Ay_r(t).$$

Справедливость Π_2 доказана.

Теперь сформулируем теорему определяющая общее решение.

Теорема 8. *Пусть матрица А имеет собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, *соответственно кратностями* $k_1, k_2, \ldots, k_m$, *причем* $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ *и* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{k_1}$ *серия с собственным значением* λ_1*;* η_{k_1+1}, $\eta_{k_1+2}, \ldots, \eta_{k_1+k_2}$ *серия с собственным значениям* λ_2 *и т.д. Тогда каждой серии соответствует система решений уравнения (4), которые можно выписать в следующем виде:*

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \eta_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 = \eta_1 e^{\lambda_1 t} + \eta_2, \\ y_{k_1} = \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \ \ldots + \eta_{k_2}\right) e^{\lambda_1 t}, \\ y_{k_1+1} = \eta_{k_1+1} e^{\lambda_2 t}, y_{k_1+2} = \eta_{k_1+1} e^{\lambda_2 t} + \eta_{k_1+2}, \ldots, \\ y_{k_1+k_2} = \left(\frac{t^{k_1+k_2-1}}{(k_1+k_2-1)!}\eta_{k_1+1} + \ \ldots + \eta_{k_1+k_2}\right) e^{\lambda_2 t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right\} \qquad (16)$$

и общее решение системы уравнений (4) описывается формулой

$$y_{\text{об}} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ \ldots + c_n y_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– произвольные постоянные.*

Доказательство этой теоремы проводится, как и в случае доказательство теоремы 7.

Подведя итог можно сказать, что теоремы 7 и 8 подтверждают существование общего решения системы (4). Теперь нам осталось указать способ нахождения частного решения системы (3). При исследовании нормальной системы линейных уравнений было доказано формула нахождения частного решения нормальной системы неоднородного уравнения.

Частное решение было найдено методом вариации постоянных. Если воспользоваться этой формулой, то частное решение (3) записывается формулой

$$x_{\text{ч}} = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau\right),$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (4); $\Phi^{-1}(t)$ – матрица, обратная матрица $\Phi(t)$.

$\varPhi(t)$ – фундаментальная матрица, которая составляется фундаментальной системой решений уравнения (4). Согласно теорем 7, 8, функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ определяемое этими теоремами являются фундаментальными системами.

Используя $\varPhi(t)$ общее решение $y_{\text{об}}$ можно записать в виде

$$y_{\text{об}} = \varPhi(t) \cdot C, \text{ где } C = (C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Теперь можем написать общее решение неоднородной системы

$$x_{\text{об}} = y_{\text{об}} + x_{\text{ч}} = \varPhi(t) \cdot C + \varPhi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \varPhi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right)$$

или

$$x_{\text{об}} = \varPhi(t)\left(C_1 + \int_{t_0}^{t} \varPhi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right),$$

где $C_1 = C + x_0$.

Если учесть произвольность C_1, то решение можно записать и так

$$x_{\text{об}} = \varPhi(t) \int \varPhi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Примеры.

1. Рассмотрим однородную систему

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 3y_2 + 4y_2.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$.

Согласно теореме 7, частные решения представляются в виде

$$y_{1ч} = \eta_1 e^{1\cdot t},$$

η_1 – собственный вектор, соответствующее собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Пусть $\eta_1 = (\eta_{11}, \eta_{12})$. Тогда

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получим систему

$$\begin{cases} -2\eta_{11} - 2\eta_{12} = 0, \\ 3\eta_{11} + 3\eta_{12} = 0. \end{cases}$$

Эта система сводится к уравнению

$$\eta_{11} + \eta_{12} = 0.$$

Одно из чисел η_{11}, η_{12} можно выбрать произвольным.

Пусть $\eta_{11} = 1$, тогда $\eta_{12} = -1$. Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует решения

$$y_{11} = e^t, y_{12} = -e^t.$$

Аналогично, находим частное решение, соответствующее числу $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta_{21} \\ 2\eta_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -3\eta_{21} - 2\eta_{22} = 0, \\ 3\eta_{21} + 2\eta_{22} = 0. \end{cases}$$

$$3\eta_{21} + 2\eta_{22} = 0.$$

Возьмем $\eta_{21} = 2$, тогда $\eta_{22} = -3$.

Соответствующие решения имеют вид

$$y_{21} = 2e^t, y_{12} = -3e^{2t}.$$

Теперь общее решение можем записать так

$$y_1 = C_1e^t + 2C_2e^{2t}, y_2 = -C_1e^t - 3C_2e^{2t}.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 + 2e^{-t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + e^{-t}. \end{cases}$$

Сначала найдем общее решение однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 3y_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Общее решение этой системы найдено в примере 1.

$$y_1 = C_1e^t + 2C_2e^{2t},$$

$$y_2 = -C_1e^t - 3C_2e^{2t}.$$

Частное решение рассматриваемой системы найдем методом вариации постоянных. Имеем

$$x_{1ч} = C_1(t)e^t + 2C_2(t)e^{2t},$$

$$x_{2ч} = -C_1(t)e^t - 3C_2(t)e^{2t}.$$

$C_1(t),\ C_2(t)$ находим из системы

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t}, \\ -C_1'(t)e^t - 3C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t}. \end{cases}$$

Получаем

$$C_1'(t) = 8e^{-2t}, C_2'(t) = -3e^{-3t}.$$

Тогда

$$C_1(t) = -4e^{-2t},\ C_2(t) = -e^{-3t}.$$

и

$$x_{1ч} = -4e^{-t} + 2e^{-t} = -2e^{-t},$$

$$x_{2ч} = 4e^{-t} - 3e^{-t} = e^{-t}.$$

Таким образом

$$x_1 = -2e^{-t} + C_1e^{t} + 2C_2e^{2t},$$

$$x_2 = e^{-t} - C_1e^{t} - 3C_2e^{2t}.$$

3. Пусть дана система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Найдем ее общее решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (2-\lambda)^2 + 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$.

Построим решение вида

$$y_1 = \eta_1 e^{(2+i)\cdot t}, y_2 = \eta_2 e^{(2+i)\cdot t}$$

соответствующее собственному значению $\lambda_1 = 2 + i$. η_1, η_2 определяются из уравнения $-i\eta_1 - \eta_2 = 0$. Полагая $\eta_1 = 1$, находим $\eta_2 = -i$. Таким образом,

$$y_1 = e^{(2+i)\cdot t} = e^{2t}(cost + isint),$$

$$y_2 = -ie^{(2+i)\cdot t} = -e^{t}(sint - icost).$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем два вещественных линейно-независимых частных решения:

$$y_{11} = e^{2t} \cdot cost, y_{21} = e^{2t} \cdot sint,$$

$$y_{12} = e^{2t} \cdot sint, y_{22} = -e^{2t} \cdot cost.$$

Рассматривая собственное число $\lambda_2 = 2 - i$, получим такой же результат. Общим решением системы будут

$$y_1 = e^{2t}(C_1 cost + C_2 sint),$$

$$y_2 = e^{2t}(C_1 sint - C_2 cost).$$

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения вида

$$x_k' = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k),\ k = 1,2, \dots, n, \tag{1}$$

называются нормальными автономными системами порядка n.

Введя обозначения

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

систему (1) в векторной форме можно записать в виде

$$x' = f(x). \tag{2}$$

В автономную систему дифференциальных уравнений независимая переменная t явно не входит. Это означает, что закон изменения неизвестных функций, описываемый системой уравнений, не меняется течением времени.

Относительно функций $f_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ будем предполагать, что они определены на некотором открытом множестве $\mathcal{D}$ пространства размерности n. Элементы этого пространства назовем точками, координатами точки являются переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$. Также, будем предполагать, что на множестве $\mathcal{D}$ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и их частные производные первого порядка непрерывны.

При таком предположении, согласно теореме 3, решения системы (1) или (2), удовлетворяющее заданным начальным условиям существуют.

Теперь докажем, если

$$x_m = \varphi_m(t), m = 1,2, \dots, n \tag{3}$$

является решением (1), то

$$x_m = \varphi_m^*(t) = \varphi_m(t + C), m = 1,2, \dots, n \tag{4}$$

также является решением системы (1).

Так как $x_m = \varphi_m(t)$ является решением системы (1), то имеем тождество

$$\varphi_m'(t) = f_m\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big).$$

Заменяя в этих тождествах t через $t + C$ получаем:

$$\varphi_m'(t + C) = f_m\big(\varphi_1(t + C), \dots, \varphi_n(t + C)\big), m = 1,2, \dots, n.$$

Из правила дифференцирования сложной функции вытекает

$$\big(\varphi_m^*(t)\big)' = \frac{d\varphi_m^*(t)}{dt} = \frac{d\varphi_m(t+C)}{dt} = \frac{d\varphi_m(t+C)}{d(t+C)} \cdot \frac{d(t+C)}{dt} =$$

$$= \varphi_m'(t + C).$$

Таким образом,

$$\big(\varphi_m^*(t)\big)' = \varphi_m'(t + C) = f_m\big(\varphi_1(t + C), \dots, \varphi_n(t + C)\big) =$$

$$= f_m\big(\varphi_1^*(t), \dots, \varphi_n^*(t)\big).$$

Отсюда вытекает, что $\varphi_m^*(t)$ или $\varphi_m(t + C)$ являются решением (1).

Теперь перейдем к кинематической интерпретации решений системы (1).

Каждому решению

$$x_m = \varphi_m(t),\ m = 1,2, \dots, n \tag{5}$$

системы (1) поставим соответствие движение точки в n – мерном пространстве, задаваемое уравнениями (5), где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты точки в пространстве, а t – время. В процессе движения эта точка в пространстве описывает некоторую траекторию.

Если с решением (5) рассмотреть другое решение

$$x_m = \psi_m(t), m = 1,2, \dots, n \quad (6)$$

то траектории, соответствующие этим решениям, либо не пересекаются в пространстве, либо совпадают.

ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ЗАМКНУТЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Поставим вопрос о том, может ли траектория, изображающая решение системы (1), пересекать себя.

Ответ на поставленный вопрос можно сформулировать так: имеется три сорта траекторий:

1) Положение равновесия;
2) Периодические траектории (циклы);
3) Траектории без самопересечений.

1) Если функция

$$\varphi_m(t) = a_m, m = 1,2, \dots, n$$

где $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ есть точка множества $\mathcal{D}$, не зависящая от t, является решением системы (1), то это решение называется положением равновесия.

Таким образом, если $\varphi_m(t)$ положение равновесия, то точка $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ не движется при изменении t, а стоит на месте.

2) Существует такое положительное число T, что при произвольном t имеют место равенства

$$\varphi_m(t+T) = \varphi_m(t), m = 1,2, \ldots, n,$$

но, при $|\tau_1 - \tau_2| < T$, хотя бы для одного $m = 1,2, \ldots, n$ имеет место равенство

$$\varphi_m(\tau_1) \neq \varphi_m(\tau_2).$$

В этом случае решение

$$x_m = \varphi_m(t), \qquad m = 1,2, \ldots, n$$

называется периодическим с периодом T, а траектория, описываемая решением, называется замкнутой траекторией или циклом.

Из теоремы существования и единственности решения следует, что через каждую область $\mathcal{D}$ системы (1) проходит траектория, изображающая решение системы.

Таким образом, вся область $\mathcal{D}$ полностью заполняется траекториями, которые попарно не пересекаются. Среди всех траекторий, особо выделяются самопересекающиеся, которые являются либо положениями равновесия или циклами.

Мы рассмотрели кинематическую интерпретацию системы (1). Сама система (1) также допускает геометрическую интерпретацию.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Теперь определим геометрическую интерпретацию системы (1). Пусть $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ – произвольная точка множества $\mathcal{D}$, тогда этой точке соответствует последовательность из n чисел:

$$f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}),\ \dots, f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}).$$

Эти числа можно рассматривать как компоненты вектора

$$f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) = f(x_0),$$

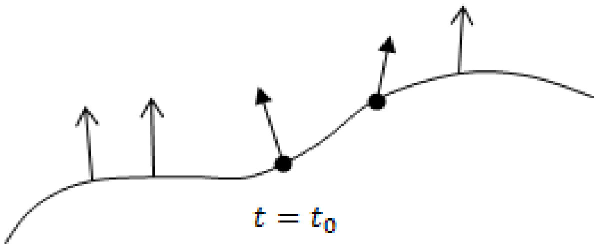
проведенного в n-мерном пространстве и выходящего из точки $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$.

Таким образом, автономной системе ставится в соответствие геометрический образ – векторное поле, заданное на открытом множестве $\mathcal{D}$. В каждой точке $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ множества $\mathcal{D}$ определен вектор $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ выходящий из этой точки.

Установим связь между геометрической интерпретацией самой системы (1) и геометрической интерпретацией решений системы (1). Эта связь заключается в следующем: в силу геометрической интерпретации системы уравнений в точке $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ поставлен в соответствие вектор $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ выходящий из этой точки. Далее, согласно теореме существования и единственности, существует решение $x_m = \varphi_m(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_m(t_0) = x_{0m},\ m = 1,2, \dots, n.$$

В силу кинематической интерпретации, решению $x_m = \varphi_m(t)$, соответствует в пространстве движения точки (это возможно $\mathcal{D}$), описывающее траекторию, причем, в момент времени $t = t_0$, движущаяся точка проходит через положение $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ в пространстве.



(n=3)

Таким образом, векторная скорость $(x_1', \ldots, x_n')$ точки, описывающей решение $x_m = \varphi_m(t)$, в момент ее прохождения через положение $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ совпадает с вектором $f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Это совпадение выражается системой уравнения (1) при

$$x_m = x_{0m},\ m = 1,2, \ldots, n;\ t = t_0.$$

Пространство размерности n , в котором интерпретируются решения автономной системы (1) в виде траектории и сама автономная система (1) в виде векторного поля, называется фазовым пространством системы (1).

Траектории называются фазовыми траекториями, векторы $f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ называются фазовыми скоростями. В фазовом пространстве время t считается параметром.

ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ФАЗОВЫЕ СКОРОСТИ

Рассмотрим теперь положения равновесия с точки зрения фазовых скоростей.

Пусть точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ множества $\mathcal{D}$.

П3. Если фазовая скорость $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ равна нулю, т.е. $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, то это условие является необходимым и достаточным, чтобы точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ была положением равновесия системы (1), т.е. существует решение $x_m = \varphi_m(t)$ системы, для которого $\varphi_m(t) \equiv a_m$.

Из этого предложения вытекает: для отыскания всех положений равновесия системы (1) нужно решить систему уравнений

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, m = 1,2, \dots, n.$$

Эта система представляет собой систему конечных уравнений (производные в нее не входят).

Докажем утверждение П3. Пусть точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ положение равновесия системы (1), т.е. существует решение $x_m = \varphi_m(t)$ системы (1) для которого

$$\varphi_m(t) \equiv a_m,\ m = 1,2, \dots, n\,.$$

Подставляя это решение в систему (1) получим

$$\varphi_m'(t) = (a_m)' = 0 = f_m(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Таким образом, вектор $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ фазовой скорости равна нулю в точке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Пусть $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Тогда из (1) имеем

$$\varphi_m'(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

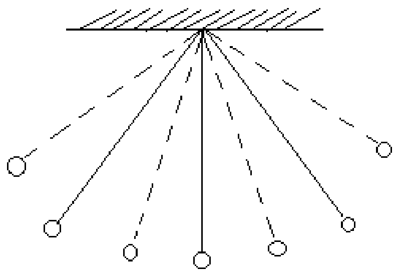
Отсюда вытекает, что $\varphi_m(t) \equiv a_m$.

УСТОЙЧИВОСТЬ

Достаточно многие процессы описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие системы всегда имеют бесконечное множество решений, и для задания одного определенного решения нужно указать его начальные значения. Употребляемые на практике устройства обычно работают на вполне определенном режиме, и в их работе, на первый взгляд, невозможно обнаружить наличия бесконечного множества режимов работы, соответствующих различным решениям системы уравнений. Это может объясниться либо тем, что начальные значения решения при запуске устройства выбираются каким-то определенным образом, либо тем, что начальные значения при продолжительной работе прибора утрачивают свое влияние, и устройство само стабилизирует свою работу на стационарном решении.

Приведем пример. Рассмотрим работу стенных часов. Такие часы идут с совершенно определенным размахом маятника, хотя при запуске часов маятник можно отклонить от вертикального положения более или менее сильно. Если маятник отклонить недостаточно сильно, то через некоторое время он остановится.

Если же отклонение достаточно велико, то через короткое время амплитуда колебаний стабилизируется, и часы будут идти с этой амплитудой колебаний неопределенно долго. Таким образом, у системы уравнений, описывающей работу часов, имеются два стационарных решения: положение равновесия, соответствующее отсутствию хода, и периодическое решение, соответствующее нормальному ходу часов. Всякое другое решение, а этих решений, несомненно, имеется бесконечное множество, очень быстро приближается к одному из этих двух стационарных и по истечению некоторого времени становится практически не отличимым от него.



Отклонению маятника соответствуют определенные начальные значения, которые при определенных условиях, определяют некоторые решения описывающие колебания маятника. Совокупность решений определяемые небольшими отклонениями маятника обозначим Ω_0 , а совокупность решений определяемые достаточно большими отклонениями обозначим Ω_p.

Если возьмем произвольные, нестационарные решения, из Ω_0 или Ω_p , то через некоторое время эти решения приближаются к одному из стационарных решений. Каждое из двух стационарных решений является в некотором смысле устойчивым.

Таково не вполне точно формулированное определение устойчивости решения.

Приведенный пример показывает, что фазовое пространство системы уравнений, описывающей работу часов, распадается на две области притяжения.

Если взять начальное значение в одной из областей, то решение (из Ω_0) будет стремиться к положению равновесия; если взять начальные значения в другой области, то решение (из Ω_p) будет стремиться к периодическому решению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

Рассмотрим систему уравнений

$$x'_m = f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (1)$$

Систему (1) в векторной форме запишем в виде

$$x' = f(t, x) \qquad (2)$$

Систему (1), (2) будем считать определенным на бесконечном интервале времени $t_0 \leq t < +\infty$.

Пусть $x = \varphi(t)$ решение системы (2) удовлетворяющее начальным условиям $t = t_0$, $x_0 = \varphi(t_0)$ и определенное для всех $t > t_0$.

Пусть $x = \tilde{\varphi}(t)$ произвольное решение системы (2), удовлетворяющее начальным условиям $t = t_0$, $\tilde{x}_0 = \tilde{\varphi}(t_0)$. Решения $x = \tilde{\varphi}(t)$ с начальными условиями $t = t_0$, $\tilde{x}_0 = \varphi(t_0)$ и определенные для любого $t > t_0$ обозначим $\Omega\,(t_0, \tilde{x}_0)$.

Определение 1. *Если для любого положительного числа* ε, *найдется такое положительное число* δ, *что при* $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$ *имеем* $|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \varepsilon$ *при всех* $t > t_0$, *то решение* $x = \varphi(t)$ *называется устойчивым по Ляпунову.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Пусть

$$x'_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (1)$$

нормальная автономная система и

$$x' = f(x) \qquad (2)$$

- ее векторная запись.

Относительно функций

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (3)$$

будем предполагать, что они определены и имеют непрерывные частные производные первого порядка на некотором открытом множестве $\mathcal{D}$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Это условие в дальнейшем гарантирует существование и единственность решений с заданными начальными условиями.

Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $(a_m - const)$ положение равновесия уравнения (2) и $x = \varphi(t)$ произвольное решение уравнения с начальным условием

$$t = t_0, x_0 = \varphi(t_0) \qquad (4)$$

и определенные для любого $t > t_0$.

Совокупность таких решений обозначим $\Omega(t_0, x_0)$.

Определение 2. *Если* $\varphi(t) \epsilon\, \Omega(t_0, x_0)$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *, что при* $|x_0 - a| < \delta$ *имеем*

$|\varphi(t) - a| < \varepsilon$ *при всех* $t > t_0$, *то* a *называется положение равновесия, а уравнение (2) называется устойчивым по Ляпунову.*

Определение 3. *Если:*

1. Положение равновесия a *уравнения (2) устойчива по Ляпунову.*

2. Существует настолько малое положительное число δ_1, *что при* $|x_0 - a| < \delta_1$ *имеем:*

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t) - a| = 0,$$

то положение равновесия a *уравнения (2) называется асимптотически устойчивым.*

Пример уравнения первого порядка

Рассмотрим уравнение

$$x' = f(x) \tag{5}$$

Пусть $f(0) = 0$, т. е. $x = 0$ является положением равновесия. Устойчивость этого решения зависит от знака $f(x)$ при x, близких к нулю.

Предположим, что, когда x возрастая, переходит через нуль функция меняет свой знак с “+” на “−”.

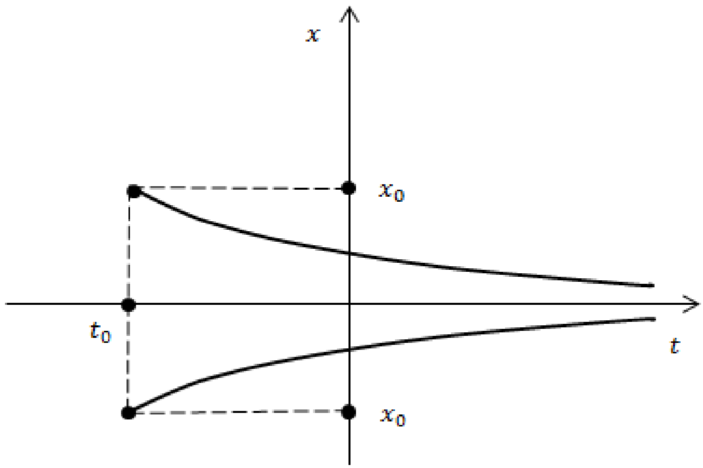
Пусть $x = \varphi(t)$ решение уравнения (5) с начальным условием $x_0 = \varphi(t_0)$ определенное для всех $t > t_0$. $x = \varphi(t)$ подставляя в (5) имеем тождество

$$\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right) \tag{6}$$

Если в (6) для всех $t > t_0$: $\varphi(t) < 0$, то $f\left(\varphi(t)\right) > 0$. Тогда $x = \varphi(t)$ возрастает при $t > t_0$.

Если для всех $t > t_0$: $\varphi(t) > 0$, то $f\left(\varphi(t)\right) < 0$ и решение $x = \varphi(t)$ убывает.

В обеих случаях решение $x = \varphi(t)$ достаточно близка к решению $x = 0$, если только начальные условия x_0 близки к нулю.



УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Теперь сформулируем достаточные условия устойчивости положения равновесия для автономной линейной системы с постоянными коэффициентами.

Пусть рассматривается система

$$x' = Ax, \tag{7}$$

где $A = (a_{mk})$ $(m, k = 1, \dots, n)$ – постоянная матрица порядка n,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = \varphi(t)$ – решение системы (7) с начальными значениями

$$t = t_0,\ \varphi(t_0) = x_0.$$

Достаточное условие устойчивости: если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то существуют такие положительные числа α и r, что выполнено неравенство

$$|\varphi(t)| \le r|x_0|e^{-\alpha t},\ t \ge t_0 \tag{8}$$

Из неравенства (8) непосредственно следует, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (7) является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым.

Из сформулированного предложения вытекает, что отрицательность действительных частей всех собственных значений матрицы A является достаточным условием устойчивости и асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$.

Пусть e_k – единичный координатный вектор номера k, т.е.

$$e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

где 1 стоит на k – месте. Пусть $\varphi_k(t)$ – решение уравнения (7) с начальным значением

$$\varphi_k(t_0) = e_k, \;\; k = 1, \dots, n.$$

Тогда решение $x = \varphi(t)$ уравнения (7) с начальным значением $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ можно записать в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_{0k} \;\; \varphi_k(t).$$

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Пусть рассматривается система (1)

$$x'_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \;\; m = 1, \dots, n, \qquad (1)$$

определенная в множестве $\mathcal{D}$ переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – положение равновесия этой системы, $a \in \mathcal{D}$. Далее предполагается что правая часть (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения.

Положим

$$x_m = a_m + \xi_m, \qquad m = 1, \dots, n$$

где ξ_m – новые неизвестные функции.

x_m подставляя в (1) и разлагая правые части в ряд Тейлора по переменным ξ_m, получаем:

$$\xi_m' = f_m(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_k} \cdot \xi_k + R_m, m = 1, \dots, n, \quad (1)^*$$

где R_m – член второго порядка малости относительно неизвестных ξ_m.

Так как, a – есть положение равновесия системы (1), то

$$f_m(a) = 0.$$

Полагая

$$a_{mk} = \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n}$$

систему $(1)^*$ можно записать в виде

$$\xi_m' = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot \xi_k + R_m, \; m = 1, \dots, n \qquad (1)^{**}$$

Справедлива следующая

Теорема (Ляпунова). *Если все собственные значения матрицы* $A = (a_{mk})$ *имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия* a *системы (1) асимптотически устойчиво; более того, существует настолько малое положительное число* δ*, что при* $|x_0 - a| < \delta$ *имеет место неравенство*

$$|\varphi(t) - a| \le r|x_0 - a|e^{-\propto(t-t_0)},$$

где $\varphi(t_0) = x_0$, r *и* α *– положительные числа, не зависящие от* x_0.

Не ограничивая общности, можно считать $a = 0$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью функций Ляпунова. Некоторые положительно определенные квадратичные формы называются функциями Ляпунова.

Определим квадратичную форму. Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

переменный вектор n – мерного пространства.

Функция $W(x)$ определяемая формулой

$$W(x) = \sum_{m,k=1}^{n} w_{mk} \cdot x_m \cdot x_k,$$

где $w_{mk} = w_{km}$ – действительные числа; называется квадратичной формой от вектора x.

Если при $x \neq 0$ имеем:

$$W(x) > 0,$$

то квадратичная форма называется положительно определенной.

Для любой квадратичной формы имеет место неравенство

$$\mu|x|^2 \leq W(x) \leq \nu|x|^2, \qquad (9)$$

где μ, ν – некоторые положительные числа, x – произвольный вектор. Теперь рассматривая линейную однородную систему вида (7) (соответствующее системе $(1)^{**}$) можно построить положительно определенную квадратичную форму $W(x)$.

Решение уравнения (7) с начальными значениями t_0, x_0 обозначим $\varphi(t)$. Имеем

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_{0k} \cdot \varphi_k(t) \qquad (10)$$

Теперь положим

$$W(x_0) = \int_{t_0}^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau. \qquad (11)$$

Учитывая, (10) получим

$$W(x_0) = \sum_{m,k=1}^{n} x_{0m} \cdot x_{0k} \int_{t_0}^{\infty} \big(\varphi_k(\tau), \varphi_m(\tau)\big) d\tau. \qquad (12)$$

Так как, каждая функция $\varphi_k(t)$ удовлетворяет неравенству (8), то каждый несобственный интеграл в правой части (12), сходится. Следовательно, $W(x_0)$ квадратичная форма относительно вектора x_0 , причем положительно определенная согласно (11) при $x_0 \neq 0$.

Теперь вычислим производную $W'_{(7)}(x_0)$ функции $W(x_0)$ в силу системы (7). Предварительно заметим,что

$$\varphi\big(\tau, \varphi(t)\big) = \varphi(\tau + t).$$

Тогда

$$W\big(\varphi(t)\big) = \int\limits_0^\infty \big|\varphi\big(\tau, \varphi(t)\big)\big|^2 d\tau = \int\limits_0^\infty |\varphi(\tau + t)|^2 d\tau =$$

$$= \int_t^\infty |\varphi(\tau)|^2 d\tau.$$

Таким образом

$$W'_{(7)}(x_0) = \frac{d}{dt} W\big(\varphi(t)\big)\bigg|_{t = t_0} = \frac{d}{dt}\int\limits_t^\infty |\varphi(\tau)|^2 d\tau\bigg|_{t = t_0} =$$

$$= |\varphi(t)|^2\bigg|_{t = t_0} = -|x_0|^2$$

Итак,

$$W'_{(7)}(x_0) = -|x_0|^2.$$

Если учесть неравенство (9), то

$$-|x_0|^2 \leq -\frac{1}{\nu} W(x_0).$$

Следовательно

$$W'_{(7)}(x_0) \leq \frac{1}{\nu} W(x_0). \tag{13}$$

Пусть $W(x)$ – функция Ляпунова для линейной системы

$$\xi'_m = \sum_{k=1}^n a_{mk} \xi_k,\ m = 1, \dots, n \tag{14}$$

получаемой из системы $(1)^{**}$ линеаризацией, т.е. отбрасыванием остаточных членов R_m . Вычислим производную $W'_{(1)**}(x)$ функции $W(x)$ в силу системы $(1)^{**}$. Имеем

$$W'_{(1)**}(x) = \sum_{m,k=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot a_{mk} \cdot x_k + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m =$$

$$= W_{(14)}(x) + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m.$$

Выберем теперь малое положительное число b, чтобы при

$$W(x) \leq b \qquad (15)$$

вектор x принадлежал множеству $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Вторые производные $\frac{\partial^2 f_m(\theta x)}{\partial x_m \partial x_k}$, будучи непрерывными функциями, ограничены в эллипсоиде (15) и потому в этом эллипсоиде

$$|R_m| \leq n_0 |x|^2 \leq \frac{n_0}{\mu} W(x),$$

где n_0 – некоторая постоянная.

Так как, $\frac{\partial W(x)}{\partial x_m}$ есть линейная форма относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$, то

$$\left|\frac{\partial W(x)}{\partial x_m}\right| \leq l\sqrt{W(x)},$$

где l – некоторая постоянная. Таким образом, существует такое положительное число q, что при $W(x) \leq b$ имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m \leq qW(x)^{\frac{3}{2}}.$$

Выберем положительное число c таким образом, чтобы было

$$c \le b,\ q\sqrt{c} \le \frac{\beta}{2}.$$

Тогда имеем:

$$W'_{(1)**}(x) \le -\frac{\beta}{2}W(x),$$

при

$$W(x) \le \text{c}. \tag{16}$$

Полагая $\alpha = \frac{\beta}{4}$, получаем неравенство

$$W'_{(4)}(x) \le -2\alpha W(x)$$

справедливое, если для x выполняется неравенство (16).

Пусть x_0 – внутренняя точка эллипсоида (16), т. е.

$$W(x_0) \le c. \tag{17}$$

Решение системы (4) с начальными значениями t_0, x_0 обозначим $\varphi(t, x_0)$ и положим

$$w(t) = \mathtt{W}\big(\varphi(t, x_0)\big).$$

Функция $w(t)$ определена для всех значений $t \ge t_0$ и удовлетворяет условию

$$w'(t) \le -2\alpha w(t) \tag{18}$$

до тех пор, пока для нее выполнено неравенство

$$w(t) \le c. \tag{19}$$

Если $x_0 \ne 0$, то $w(t) > 0$, и мы можем произвести следующие выкладки, исходя из неравенства (18)

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \le -2\alpha;$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{w'(\tau)}{w(\tau)} d\tau \le -2\,\alpha(t - t_0);$$

$$ln w(t) - ln w(t_0) \le -2\alpha(t - t_0).$$

Последнее неравенство дает:

$$W\big(\varphi(t, x_0)\big) \leq W(x_0)e^{-2\alpha(t-t_0)}.$$

Из этого неравенства, используя неравенство (9) получаем:

$$|\varphi(t, x_0)|^2 \leq \frac{\nu}{\mu}|x_0|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0. \qquad (20)$$

Неравенство (19) верно, если для x_0 выполняется неравенство (16). Из (20), извлекая квадратный корень, получаем

$$|\varphi(t, x_0)| \leq \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}|x_0|e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Теорема доказана.

Положение равновесия a уравнения (1) будем называть вполне неустойчивым, если существует такое положительное число σ , что всякое решение $\varphi(t, x_0)$, уравнения (1), начинающееся в точке $x_0 \neq a$ шара $|x_0 - a| < \sigma$, объязательно покидает этот шар и больше в него уже не возвращается.

Если все собственные значения матрицы $A = (a_{mk})$ имеют положительные действительные части, то положение равновесия a уравнения (1) вполне неустойчива.